

Esame scritto di Istituzioni di metodi matematici
della fisica. Università di Ferrara

September 4, 2015

1. (14 punti) Si considerino le funzioni reali appartenenti a $L^2(-\pi, \pi)$ e estese in maniera periodica a tutta la retta reale. Si consideri l'operatore

$$Tf(x) = f(x - a\pi) \quad \text{con } a \in \mathbb{R}$$

- (a) Sia $a = 1/4$, e si consideri l'operatore T^m , con $m = 8$. Quale è il numero massimo di autovalori di T ?
- (b) Usando la base e^{inx} si trovino autovalori e autovettori di T (con $a = 1/4$). Qual è la dimensione degli autospazi?
- (c) Sia ora a un numero reale generico. Seguendo il procedimento delle domande precedenti si discuta al variare di a in quali casi esiste un numero finito oppure infinito di autovalori distinti. In entrambi i casi si trovi una base di autovettori e si dica qual è la dimensione degli autospazi relativi.
- (d) Si consideri l'operatore

$$Sf(x) = f(-x)$$

Si trovi, se esistono, autovettori comuni con T nel caso $a = 1/4$. In generale, per quali valori di a esistono autovettori comuni con T ? Si trovino tali autovettori, con rispettivi autovalori. Per quali a esiste una base di autovettori comune?

- (e) Si consideri l'operatore $Q = T^2 - T$. Trovare nucleo e l'immagine di Q , per $a = 1/4$. L'immagine è uno spazio chiuso (o completo)? Si giustifichi la risposta.

2. (14 punti) Sia data la equazione

$$y''(t) + y(t) = f(t)$$

- (a) Se $f(t) = \delta(t + \pi/2) + \delta(t - \pi/2)$ la soluzione particolare per $y(t)$ e' L^2 ? Possiamo dire che e' continua? Possiamo dire che e' C^1 (continua e con derivata continua)? E' a decrescenza rapida?
- (b) Si calcoli esplicitamente $y(t)$ con la $f(t)$ data al punto precedente.
- (c) Si risponda alle domande del punto (a) nel caso in cui $f(t) = \delta(t + a) + \delta(t - a)$, al variare di $a \in \mathbb{R}$.
- (d) (*) Si risponda alle domande del punto (a) nel caso in cui $f(t) = \delta'(t + \pi/2) + \delta'(t - \pi/2)$.

3. (7 punti) Si calcoli con il metodo dei residui il seguente integrale

$$\int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{x^4 + 16}$$