Esame scritto Istituzioni di metodi matematici della fisica. Università di Ferrara

September 29, 2014

1. (5 punti)

   - Il set e^{2inx} $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ e' un set completo in $L^2(-\pi, \pi)$, $L^2(-2\pi, 2\pi)$ e $L^2(0, \pi)$?
     Abbiamo visto a lezione che in generale in un intervallo di lunghezza L l'insieme delle funzioni $e^{inx\frac{2\pi}{L}}$ *e' un set completo. Il primo caso (* $L^2(-2\pi, 2\pi)$*) ha lunghezza* 4π *quindi un set completo è* $e^{inx/2}$ *, mentre il set* e^{2inx} *non completo poiche mancano tutte le frequenze semintere e anche le frequenze intere e dispari. Nel secondo caso la lunghezza e'* π *quindi* e^{2inx} *un set completo.*

   - Il set $e^{i(2n+1)x}$ e' un set completo negli spazi del punto precedente?
     la risposta è la stessa del punto precedente per il caso e^{2inx} *poichè moltiplicare per uns funzione* e^{ix} *non cambia la completezza del sistema. Infatti un set* e_n *è completo se e solo se per ogni funzione* f *tale che* $(e_n, f) = 0$ *allora* $f = 0$*. Ma il prodotto scalare e' dato da*

     $$\int e_n(x) f^*(x) dx = \int e^{i(2n+1)x} f^*(x) dx = \int e^{i2nx} (f^*(x) e^{-ix})$$

     . La completezza del set e^{i2nx} *implica che la funzione* $f^*(x)e^{-ix} = 0$ *e quindi anche* $f(x) = 0$*, poiche' il fattore* e^{-ix} *non si annulla mai.*

2. (12 punti) Si consideri l'operatore lineare definito sul set completo $e_n = e^{2inx}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ definito in uno degli spazi dei punti precedenti

$$T(e_n) = e_n - (n-1)\, e_{n-1}$$

   - Si trovino autovalori e autovettori di T. *Occorre tovare vettori v e numeri complessi λ tali che*

     $$Tv = \lambda v$$

     Un vettore generico e' della forma $v = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e_j a_j$ dove a_j sono coefficienti numerici complessi. quindi la equazione diventa:

     $$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} T(e_j) a_j = \lambda \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e_j a_j$$

     cioe'

     $$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} (e_j - (j-1)\, e_{j-1}) a_j = \lambda \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e_j a_j$$

     Tale condizione e' valida se i coefficienti di ogni e_j sono identici, cioe' se vale la seguente condizione:

     $$a_n - n a_{n+1} = \lambda a_n$$

     . Se $\lambda = 1$ ad esempio la equazione e' risolta se tutti gli $a_n = 0$ eccetto a_1. Quindi e_1 e' un autovettore con autovalore 1.
     Se invece $\lambda \neq 1$ la condizione per $n = 0$ ci dice che $a_0 = 0$. Se $a_0 = 0$ allora la stessa condizione per $n = -1$ ci dice che anche $a_{-1} = 0$ e cosi via per tutti gli $n < 0$. Invece per $n > 0$ la condizione si riscrive anche come:

     $$a_{n+1} = a_n (1-\lambda)/n.$$

     Tutti i vettori tali che $a_n = \frac{(1-\lambda)^{n-1}}{(n-1)!} a_1$ con $n > 0$ risolvono la precedente condizione. Tali coeffcienti appartengono a ℓ_2 poiche' la serie degli $|a_n|^2$ e' convergente (il fattoriale al quadrato va a zero piu' velocemente di $(1-\lambda)^{2(n-1)}$ per $n \to +\infty$).
     Percio' per ogni λ esiste un autovettore che ha la forma $v = a_1 \sum_{n=1}^{\infty} e_n \frac{(1-\lambda)^{n-1}}{(n-1)!}$ (quindi gli autovalori sono tutti i numeri complessi λ).

3. Si trovi il Ker(T) e si specifichi la sua dimensione. *Il ker(T) e' l'insime dei vettori con autovalore = 0, cioe' i vettori proporzionali a $v = a_1 \sum_{n>0} e_n \frac{1}{(n-1)!}$. E' un sottospazio di dimensione 1.*

4. E' possibile stabilire se le autofunzioni di T sono funzioni continue di x? *Si', perche' i coefficienti formano una serie convergente anche in senso* ℓ_1 *(e' la serie esponenziale).*

(12 punti) Si consideri la funzione $f(x) = \sin^2(ax)/(ax)$ (con $a > 0$)

- La f(x) appartiene a $L^2(R)$? La trasformata di Fourier $f(\omega)$ e' continua?
- Si calcoli la trasformata di Fourier con il metodo dei residui
- Per $a \to 0$ a che distribuzione tende la $f(x)$? (si esamini il comportamento per $a \to 0$ su una funzione test C^∞)
- Si calcoli la trasformata di Fourier di $g(x) = \sin^2(ax)$ e si trovi il limite per $a \to 0$

(8 punti) Si calcoli il seguente integrale (trasformata di Fourier) con il metodo dei residui:

$$\int_0^\infty \frac{Log[x]}{x^2 - i} dx$$