Esame scritto di Istituzioni di metodi matematici della fisica. Università di Ferrara

July 23, 2015

1. (15 punti)
   Sia S un operatore autoaggiunto in $L^2(-\pi,\pi)$ e si consideri l'operatore
   $$T \equiv e^{aS} = 1 + (aS) + \frac{(aS)^2}{2!} + ...$$
   con $a \in C$.

   - Considerando la serie al 1^o e al 2^o ordine in a si dica se:
     - Esistono valori di a per cui T è autoaggiunto? Quali? *Bisogna dimostrare che* $(Tv,w) = (v,Tw)$ *per ogni vettore v,w. Al primo ordine ho:* $(Tv,w) = ((1+aS)v,w) = (v,w)+a^*(Sv,w)$ *e ho* $(v,Tw) = (v,(1+aS)w) = (v,w) + a(v,Sw)$*. Siccome* $(v,Sw) = (Sv,w)$ *allora le due quantita' sono uguali se e solo se* $a^* = a$*, cioe' se a è reale. Al 2 ordine uso lo stesso procedimento:* $(Tv,w) = ((1 + aS + a^2/2S^2)v,w) = (v,w) + a^*(Sv,w) + (a^*)^2/2(S^2v,w)$ *e ho* $(v,Tw) = (v,(1 + aS + a^2/2S^2)w) = (v,w) + a(v,Sw) + a^2/2(v,S^2w)$*. Ora, siccome* $(v,S^2w) = (Sv,Sw) = (S^2v,w)$ *allora la condizione e' la stessa, cioe' a deve essere reale.*
     - Esistono valori di a per cui T conserva i prodotti scalari? Quali? *Stavolta bisogna dimostrare che* $(Tv,Tw) = (v,w)$ *per ogni vettore v,w. Al primo ordine ho:* $(Tv,Tw) = ((1 + aS)v,(1 + aS)w) = (v,w) + a^*(Sv,w) + a(v,Sw)$ *, dove ho tenuto solo termini al piu' del 1 ordine in a. :La condizione e' quindi che* $a + a^* = 0$*, cioe' che a sia immaginario. Al 2 ordine uso lo stesso procedimento e la condizione e' la stessa.*
     - Esistono valori di a per cui T contemporaneamente è autoaggiunto e conserva i prodotti scalari? Quali? *Solo* $a = 0$*, dato che deve essere sia reale che immaginario.*
   - Se S possiede una base di autovettori, è vero che T possiede una base di autovettori? *si', poiche' dato un autovettore v si ha* $Sv = \lambda v$ *e quindi* $Tv = (1 + aS + a^2S^2/2 + ...)v = (1 + a\lambda + a^2\lambda^2/2 + ...)v = e^{a\lambda}v$
   - Si consideri l'operatore T costruito come sopra, partendo da $S = -i\frac{d}{dx}$.
     - Si scriva esplicitamente l' azione di T su una base di $L^2(-\pi,\pi)$, sommando *tutti* i termini della serie. Per quali valori di a accade che $T = I$ sulla base? *Scegliamo la base* $e_n \equiv e^{inx}$*, allora avro'* $Se_n = -ne_n$*, quindi* $Tv = e^{-an}v$*. Questo agisce come la identita' se* $a = 2k\pi i$*, dove k e' un numero intero.*

- Sia data una funzione $f(x)$ in $L^2(-\pi, \pi)$ che possieda una estensione analitica a tutto il piano complesso. Si scriva il risultato della serie T applicata a tale funzione $f(x)$ e si dica a cosa converge la somma di tutta la serie. *L'operatore applicato a una funzione $f(x)$ e' $Tf(x) = (1 + ia\frac{d}{dx} + (ia)^2\frac{d^2}{dx^2} + ...)f(x) = f(x + ia)$, poiche' questo e' lo sviluppo in serie di Taylor.*
- Si trovi una condizione su tale f affinchè T conservi i prodotti scalari in $L^2(-\pi, \pi)$ per ogni a immaginario. *Preso a immaginario lo possiamo scrivere come $a = i\alpha$, con α reale e quindi l'operatore e' una traslazione della funzione $f(x)$ si una quanitita' reale α: $Tf(x) = f(x - \alpha)$. Una condizione sufficiente sulle funzioni $f(x)$ affinche' i prodotti scalari siano conservati e' ad esempio che la $f(x)$ sia periodica di periodo 2π.*

- Se sono dati due operatori autoaggiunti S_1 e S_2, è vero che $e^{S_1}e^{S_2} = e^{S_2}e^{S_1}$? Se no, trovare due operatori S_1 e S_2 sulle precedenti funzioni $f(x)$, che servano da controesempio. *No. Se sviluppo al 2 ordine $e^{S_1}e^{S_2} = 1+S_1+S_2+S_1S_2+S_1^2/2+S_2^2/2$ che e' diverso da $e^{S_2}e^{S_1} = 1+S_1+S_2+S_2S_1+S_1^2/2+S_2^2/2$ poiche' in generale $S_1S_2 \neq S_2S_1$. Solo se i due operatori commutano allora anche gli esponenziali commutano. Un controesempio puo' essere dato da $S_1 = i\frac{d}{dx}$ e S_2 operatore di moltiplicazione definito come $Sf(x) = xf(x)$, che e' autoaggiunto ma non commuta con S_1.*

2. Si consideri (13 punti) $f_\epsilon(x) = \frac{1}{(x-i\epsilon)^2}$, con $\epsilon > 0$ e con $x \in R$.

- Si dica (senza effettuare il calcolo) se la sua trasformata di Fourier è continua, $L2$ e se è a decrescenza rapida. *La funzione e' L1 quindi la trasformata e' continua. E' L2 quindi la trasformata e' L2. E' C^∞ con tutte le derivate L1, quindi la trasformata e' a decrescenza rapida.*

- Si calcoli la sua trasformata di Fourier $\hat{f}_\epsilon(\omega)$. *La trasformata si ottiene col lemma di Jordan: chiudendo nel semipiano inferiore ottengo zero mentre nel semipiano superiore trovo un polo e ottengo:* $-2\pi\omega\theta(\omega)e^{-\epsilon\omega}$ A cosa converge puntualmente la $\hat{f}_\epsilon(\omega)$ per $\epsilon \to 0$? *Converge a* $-2\pi\omega\theta(\omega)$ E uniformemente? *Non converge uniformemente poiche' per ogni valore di ϵ la $\hat{f}_\epsilon(\omega)$ e' fuori da una striscia di spessore ϵ attorno alla $\hat{f}(\omega) = -2\pi\omega\theta(\omega)$, se si va a valori di $|\omega|$ abbastanza grandi* E in senso L2? *No, poiche' la $\hat{f}(\omega)$ cresce all'infinito e quindi non e' L2.*
(*) E in senso S'? *Si', poiche' c'e' convergenza puntuale a una funzione localmente sommabile e che cresce all'infinito come un polinomio (vedi libro sez. 5.2)(si giustifichino tutte le risposte).*

- Siano f^R_ϵ e f^I_ϵ le parti reale e immaginaria di f_ϵ e si calcolino le $\hat{f}^R_\epsilon$ e $\hat{f}^I_\epsilon$ separatamente. *Se moltiplico sopra e sotto per $(x+i\epsilon)^2$ separo parte reale e immaginaria :* $f(x) = \frac{x^2-\epsilon^2}{(x^2+\epsilon^2)^2} + \frac{2ix\epsilon}{(x^2+\epsilon^2)^2}$. A quale distribuzione tende la $f^I_\epsilon(x)$ per $\epsilon \to 0$? *Tende a $-i\delta'(x)$, poiche' e' proporzionale alla derivata di $\epsilon/(x^2+\epsilon^2)$ che tende alla* δ Esiste il limite della $f^R_\epsilon(x)$ per $\epsilon \to 0$? *Si', basta applicare a una funzione test, integrare col metodo dei residui e vedere che il polo da' un contributo finito per $\epsilon \to 0$.*

- (*) Si dimostri che in senso S' vale:
$$lim_{\epsilon\to 0}\frac{x}{x^2+\epsilon^2} = P\frac{1}{x}$$
dove P è la parte principale di Cauchy in $x = 0$ *basta applicare a una funzione test (oppure fare la trasformata di Fourier), integrare col metodo dei residui e vedere che il risultato e' lo stesso al membro di destra o sinistra per $\epsilon \to 0$.*

- (*) A cosa tende in senso S' la f^R_ϵ per $\epsilon \to 0$ (si usi la distribuzione $P\frac{1}{x}$)? *Alla derivata di $-\frac{x}{x^2+\epsilon^2}$, cioe' alla derivata della distribuzione $-P\frac{1}{x}$..*

- (*) A cosa tende in senso S' la $g_\epsilon(x) \equiv \frac{1}{(x-i\epsilon)^n}$ per $\epsilon \to 0$ e per n intero positivo? *E' proporzionale alla derivata $n-1$-esima di $P\frac{1}{x} + i\pi\delta(x)$, cioe'* $\frac{(-1)^{(n-1)}}{(n-1)!}\frac{d}{dx^{n-1}}(P\frac{1}{x}) + i\pi\delta^{(n-1)}(x)$.

3. Si calcoli (7 punti)

$$\int_0^\infty \frac{Log[x]}{1+x^3}dx$$

Un cammino di integrazione utile e': semiasse asse reale positivo, poi porzione di cerchio all'inifinito (che da' zero) e poi chiuderlo a $z = re^{i2\pi/3}$ *(integrando in* dr *da* $r = +\infty$ *fino a* $r = 0$*). C'e' un solo polo a* $z = e^{i\pi/3}$*. Il risultato e'* $-\frac{2\pi^2}{27}$.