Esame parziale Istituzioni di metodi matematici della fisica. Università di Ferrara

June 9, 2015

1. Si consideri la famiglia di funzioni:

$$f_\epsilon(x) = \frac{2x\epsilon}{(x^2+\epsilon^2)^2} \qquad \text{con} \qquad \epsilon > 0$$

   - Le trasformate di Fourier $\hat{f}_\epsilon(\omega)$ sono L^2? Sono continue? Sono decrescenti all'infinito? (Si giustifichi la risposta)
     Si, la funzione stessa e' L2. Si, la f e' L1 quindi le $\hat{f}$ sono continue e decrescenti all'infinito.
   - Le trasformate $\hat{f}_\epsilon(\omega)$ sono a decrescenza rapida? (Si giustifichi la risposta) *Si, le derivate n-esime della f esistono e sono L1, quindi le $\omega^n \hat{f}(\omega)$ sono continue e decrescenti all'infinito.*
   - Si considerino le derivate n-esime

$$\hat{f}_\epsilon^{(n)}(\omega) = \frac{d^n \hat{f}_\epsilon(\omega)}{d\omega^n}$$

     con $n = 1, 2, 3....$ Per quali n le $\hat{f}_\epsilon^{(n)}(\omega)$ sono funzioni L^2? *Per $n = 1$, x f(x) e' ancora L2 quindi anche $\hat{f}'(\omega)$ lo e'. Per $n = 2$, $x^2 f(x)$ e' ancora L2 quindi anche $\hat{f}''(\omega)$ lo e'. Invece per $n > 2$ non lo e'.* Per quali n le $\hat{f}_\epsilon^{(n)}(\omega)$ sono funzioni continue di ω?*Per $n = 1$, x f(x) e' ancora L1 quindi $\hat{f}'(\omega)$ e' continua, invece per $n > 1$ no.*
   - Si disegni il grafico delle $f_\epsilon(x)$ (trovando massimi e minimi e disegnando l'andamento all'infinito) e si discuta la convergenza puntuale e uniforme delle $f_\epsilon(x)$.
   - Si calcoli la $\hat{f}_\epsilon(\omega)$. *Col Lemma di Jordan $i\omega\pi(e^{-\epsilon\omega}\theta(\omega)+e^{\epsilon\omega}\theta(-\omega))$*

- (*) Si verifichi esplicitamente se la $f'_\epsilon(x)$ e' L^2 e se e' continua. *La derivata è*

$$i\pi e^{-\omega\epsilon}(1-\omega\epsilon)\theta(\omega) + i\pi e^{\omega\epsilon}(1+\omega\epsilon)\theta(-\omega)$$

E' L2 poiche' non ha poli e all'infinito va a zero rapidamente. E' continua

- A cosa tende la $f(x)$ per $\epsilon \to 0$? *La trasformata $\hat{f}_\epsilon(\omega)$ tende a $i\omega\pi(\theta(\omega)+\theta(-\omega)) = i\omega\pi$. Questa e' la trasformata di $-\pi\delta'(x)$.*

- (*) Si dimostri rigorosamente la domanda precedente (cioe' si dimostri a quale distribuzione tende in senso $\mathcal{S}'$ la famiglia $f_\epsilon(x)$) *La successione delle trasformate $\hat{f}_\epsilon(\omega)$ tende a $\hat{f}(\omega) \equiv i\omega\pi$ in senso $\mathcal{S}'$, poiche' le $\hat{f}_\epsilon(\omega)$ tendono puntualmente a $i\omega\pi$, sono localmente sommabili e sono maggiorate da un polinomio. Posso quindi applicare il passaggio al limite sotto il segno di integrale in $\int_{-\infty}^{+\infty}(\hat{f}_\epsilon(\omega)-\hat{f}(\omega))\varphi dx$ (v. sez 5.2 del libro).*
Siccome le trasformate convergono in senso $\mathcal{S}'$ allora anche le funzioni di partenza $f_\epsilon(x)$ convergono in senso $\mathcal{S}'$ alla $-\pi\delta'(x)$, poiche' la $\mathcal{F}-$trasformata preserva la convergenza in senso $\mathcal{S}'$ (vedi teorema nella sez. 5.4 del libro)

2. Si consideri l'operatore lineare T che agisce sulle funzioni $f(x) \in \mathcal{H} = L^2[-\pi/2, \pi/2]$ della forma

$$T(f(x)) = g(x)$$

dove

$$g(x) = i \int_a^x f(s)ds + \frac{ia}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(s)ds$$

, con $a \in [-\pi/2, \pi/2]$

- Si specifichi l'azione di T sugli elementi di una base (un set completo ortonormale in $\mathcal{H}$) *La base e'*

$$e_n = \frac{e^{2inx}}{\sqrt{\pi}}$$

, e quindi

$$T(e_0) = \frac{i}{\sqrt{\pi}}(x - a) + \frac{ia}{\pi} \frac{\pi}{\sqrt{\pi}} = \frac{i}{\sqrt{\pi}} x \equiv w$$

e

$$T(e_n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(e^{2inx} - e^{2ina})}{2n} = \frac{e_n}{2n} - \frac{e_0}{2n} e^{2ina}$$

e si dica se: il dominio di T e' denso in $\mathcal{H}$? *si', dato che e' definito su tutti gli elementi della base.*
Il dominio e' tutto $\mathcal{H}$? *Si', poiche' dato un elemento generico*

$$v = \sum_n \alpha_n e_n$$

con $\alpha_n \in \ell_2$ calcolo $T(v)$ e trovo:

$$T(v) = \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n}{2n} e_n + e_0 \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n e^{2ina}}{2n} + \alpha_0 w$$

. I tre addendi appartengono tutti ad L^2: il primo e' una serie ℓ_2, il secondo una costante (il coefficiente e' una serie sommabile, dato che e' il prodotto scalare di due serie ℓ_2) e infine anche $w \in L^2$. L'immagine e' tutto $\mathcal{H}$? *No, poiche' esiste ad esempio la serie $x = \sum_n \frac{e_n}{n}$ non e' scrivibile come $T(v) = x$ (poiche' un tale v dovrebbe avere coefficienti costanti per $n \to \infty$)*

- Puo' l'immagine contenere una funzione costante a tratti (come la $\theta(x)$)? *No perche' un integrale di una funzione sommabile non puo' avere dei salti (solo l'integrale di una distirbuziuone come la $\delta(x)$ puo' avere un salto). Dimostrazione alternativa: una funzione come la $\theta(x)$ ha coefficienti che sono ℓ_2 ma non ℓ_1 (altrimenti sarebbe continua). Quindi vanno come $1/n^\gamma$ con $1 \geq \gamma > 1/2$, ma allora gli α_n rispettivi dovrebbero essere crescenti o al piu costanti, quindi non sono ℓ_2.*

- T e' unitario (se si', per quali valori di a)? *ovviamente no poiche' ad esempio* $||T(e_n)||^2 = 1/(2n^2)$
- T e' autoaggiunto(se si', per quali valori di a)? *Dobbiamo verificare se* $(T(e_n), e_m) = (e_n, T(e_m))$. *Se* $n \neq 0$ *e* $m \neq 0$ *trovo:* $(T(e_n), e_m) = \frac{1}{2n}\delta_{nm}$ *e anche* $(e_n, T(e_m)) = \frac{1}{2n}\delta_{nm}$. *Se* $n = m = 0$ *trovo* $(T(e_0), e_0) = 0$ *e trovo* $(e_0, T(e_0)) = 0$ *Facciamo ora anche pero'* $n \neq 0$ *e* $m = 0$. *Trovo:* $(T(e_n), e_0) = -\frac{e^{-2ina}}{2n}(e_0, e_0) = -\frac{e^{-2ina}}{2n}$. *Se faccio* $(e_n, T(e_0)) = \frac{i}{\sqrt{\pi}}(e_n, x) = -\frac{\cos(\pi n)}{2n} = -\frac{(-1)^n}{2n}$. *Se* $a = k\pi/2$, *si puo' verificare che i due risultati poiche'* $-\frac{e^{-2ina}}{2n} = -\frac{(-1)^n}{2n}$. *Quindi l'operatore e' autoaggiunto se e solo se* $a = \pm\pi/2$