Esame scritto Istituzioni di metodi matematici della fisica. Università di Ferrara

September 29, 2014

1. (5 punti)

   - Il set e^{2inx} $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ e' un set completo in $L^2(-\pi, \pi)$, $L^2(-2\pi, 2\pi)$ e $L^2(0, \pi)$?
     Abbiamo visto a lezione che in generale in un intervallo di lunghezza L l'insieme delle funzioni $e^{inx\frac{2\pi}{L}}$ e' un set completo. Il primo caso ($L^2(-2\pi, 2\pi)$) ha lunghezza 4π quindi un set completo è $e^{inx/2}$, mentre il set e^{2inx} non completo poiche mancano tutte le frequenze semintere e anche le frequenze intere e dispari. Nel secondo caso la lunghezza e' π quindi e^{2inx} un set completo.
   - Il set $e^{i(2n+1)x}$ e' un set completo negli spazi del punto precedente?
     la risposta è la stessa del punto precedente per il caso e^{2inx} poichè moltiplicare per uns funzione e^{ix} non cambia la completezza del sistema. Infatti un set e_n è completo se e solo se per ogni funzione f tale che $(e_n, f) = 0$ allora $f = 0$. Ma il prodotto scalare e' dato da

$$\int e_n(x) f^*(x) dx = \int e^{i(2n+1)x} f^*(x) dx = \int e^{i2nx} (f^*(x) e^{-ix})$$

     . La completezza del set e^{i2nx} implica che la funzione $f^*(x)e^{-ix} = 0$ e quindi anche $f(x) = 0$, poiche' il fattore e^{-ix} non si annulla mai.

2. (12 punti) Si consideri l'operatore lineare definito sul set completo $e_n = e^{2inx}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$) definito in uno degli spazi dei punti precedenti

$$T(e_n) = e_n - (n-1)\, e_{n-1}$$

- Si trovino autovalori e autovettori di T. *Occorre tovare vettori v e numeri complessi λ tali che*

$$Tv = \lambda v$$

Un vettore generico e' della forma $v = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e_j a_j$ dove a_j sono coefficienti numerici complessi. quindi la equazione diventa:

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} T(e_j) a_j = \lambda \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e_j a_j$$

cioe'

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} (e_j - (j-1)\, e_{j-1}) a_j = \lambda \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e_j a_j$$

Tale condizione e' valida se i coefficienti di ogni e_j sono identici, cioe' se vale la seguente condizione:

$$a_n - n a_{n+1} = \lambda a_n$$

. Se $\lambda = 1$ ad esempio la equazione e' risolta se tutti gli $a_n = 0$ eccetto a_1. Quindi e_1 e' un autovettore con autovalore 1.
Se invece $\lambda \neq 1$ la condizione per $n = 0$ ci dice che $a_0 = 0$. Se $a_0 = 0$ allora la stessa condizione per $n = -1$ ci dice che anche $a_{-1} = 0$ e cosi via per tutti gli $n < 0$. Invece per $n > 0$ la condizione si riscrive anche come:

$$a_{n+1} = a_n(1-\lambda)/n.$$

Tutti i vettori tali che $a_n = \frac{(1-\lambda)^{n-1}}{(n-1)!} a_1$ con $n > 0$ risolvono la precedente condizione. Tali coeffcienti appartengono a ℓ_2 poiche' la serie degli $|a_n|^2$ e' convergente (il fattoriale al quadrato va a zero piu' velocemente di $(1-\lambda)^{2(n-1)}$ per $n \to +\infty$).
Percio' per ogni λ esiste un autovettore che ha la forma $v = a_1 \sum_{n=1}^{\infty} e_n \frac{(1-\lambda)^{n-1}}{(n-1)!}$ (quindi gli autovalori sono tutti i numeri complessi λ).

3. Si trovi il Ker(T) e si specifichi la sua dimensione. *Il ker(T) e' l'insime dei vettori con autovalore = 0, cioe' i vettori proporzionali a $v = a_1 \sum_{n>0} e_n \frac{1}{(n-1)!}$. E' un sottospazio di dimensione 1.*

4. E' possibile stabilire se le autofunzioni di T sono funzioni continue di x? *Si', perche' i coefficienti formano una serie convergente anche in senso* ℓ_1 *(e' la serie esponenziale).*

(12 punti) Si consideri la funzione $f(x) = \sin^2(ax)/(ax)$ (con $a > 0$)

- La f(x) appartiene a $L^2(R)$? La trasformata di Fourier $f(\omega)$ e' continua?

  Si', e' L^2 *poiche' per* $x \to \infty$ *tende a zero come* $1/x^2$. *Non possiamo dire se sia continua poiche' non appartiene a* L^1 *(va a zero come* $1/x$ *all'infinito).*

- Si calcoli la trasformata di Fourier con il metodo dei residui *Bisogna moltiplicare per* $e^{i\omega x}$, *scrivere* $\sin(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$ *e sviluppare il quadrato. Rimangono 3 esponenziali che si possono calcolare con il lemma di Jordan chiudendo in un semicerchio (sopra o sotto a seconda del segno dell'esponenziale). Ci sono poli in* $x = 0$ *che si calcolano girando attorno all'origine con un semicerchio (che quindi da'meta' del residuo). Il risultato e':*

  $$\frac{i}{4a}\sqrt{\pi/2}(Sign[2a-\omega] + 2Sign[\omega] - Sign[2a+\omega])$$

  dove Sign e' vale +1 se l'argomento e'positivo e vale -1 se l'argomento e' negativo.

- Per $a \to 0$ a che distribuzione tende la $f(x)$? (si esamini il comportamento per $a \to 0$ su una funzione test C^∞) *La* $\hat{f}(\omega)$ *e' simile a una funzione che approssima una* $\delta(\omega)$ *di Dirac, ma e' positiva per* $\omega > 0$ *e negativa per* $\omega < 0$, *quindi se se moltiplichiamo per una funzione test* $t(\omega)$ *(continua) e poi facciamo* $a \to 0$ *da' un risultato proporzionale a* $t(\omega \to 0^+) - t(\omega \to 0^-)$. *Siccome le funzioni test* $t(\omega)$ *sono continue questo tende a zero sempre. percio' la* $\hat{f}(\omega)$ *e' una distribuzione nulla, e quindi anche la* $f(x)$

- Si calcoli la trasformata di Fourier di $g(x) = \sin^2(ax)$ e si trovi il limite per $a \to 0$ *Siccome* $xf(x) = g(x)/a$ *allora* $id/d\omega\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega)/a$.*Basta percio' fare la derivata delle funzioni segno (che si pososno scrivere come funzioni a scalino* θ*) e ottenere una somma di delte di Dirac, come segue:*

  $$\sqrt{\pi/2}\left(\delta(\omega) - \frac{1}{2}\delta(-2a+\omega) - \frac{1}{2}\delta(2a+\omega)\right)$$

  Se ora $a \to 0$ *le tre delte si cancellano esattamente e il risultato e' la distribuzione nulla.*

(8 punti) Si calcoli il seguente integrale (trasformata di Fourier) con il metodo dei residui:

$$\int_0^\infty \frac{Log[x]}{x^2-i}dx$$

Si considera il prolungamneto analitico $f(z) = \frac{Log[z]}{z^2-i}$ *e si fa l'integrale su un semicerchio. All'infinito l'integrale va piu' veloce di* $1/z$ *quindi non da' contributo. Sulla semiretta reale* $[-\infty, 0]$ *vale* $z = re^{i\pi} = -r$*, dove* r *e' la coordinata radiale e quindi la funzione e'* $\frac{Log[z]}{z^2-i} = \frac{Log[r]+i\pi}{r^2-i}$ *e* $dz = -dr$*. Quindi avro'*

$$\int_0^\infty \frac{Log[x]}{x^2-i}dx + \int_\infty^0 \frac{Log[r]}{r^2-i}(-dr) + \int_\infty^0 \frac{i\pi}{r^2-i}(-dr) = 2\pi i\, Res_i$$

I primi due integrali sono uguali e si sommano. Il terzo integrale si fa anche con i residui e da' $\frac{1}{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}\pi^2$*. Poi il residuo (polo semplice in* $z = \sqrt{i} = e^{i\pi/4}$*) nel semipiano superiore vale* $Log[e^{i\pi/4}]/(2e^{i\pi/4}) = i\pi/4/(2e^{i\pi/4})$

Quindi ottengo:

$$2\int_0^\infty \frac{Log[x]}{x^2-i}dx = -\frac{1}{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}\pi^2 + \frac{1}{4}e^{-\frac{i\pi}{4}}\pi^2$$

da cui segue:

$$\int_0^\infty \frac{Log[x]}{x^2-i}dx = -\frac{1}{8}e^{-\frac{i\pi}{4}}\pi^2$$