Esame parziale di Istituzioni di metodi matematici della fisica. Università di Ferrara

April 20, 2015

1. (10 punti) Si calcoli il seguente integrale con il metodo dei residui:
$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2(1+x^2)}dx$$

2. (8 punti) Si consideri l'integrale
$$\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{(x-z_1)^2(x-z_2)^2(x-z_3)^2(x-z_4)^2}dx$$
con $z_1 = i, z_2 = e^{i\pi/4}, z_3 = e^{i3\pi/4}, z_4 = e^{i\pi/6}$ e dove P rappresenta la parte principale attorno al punto $x = 0$.

   (a) Se $f(x) = x^n$ con n intero, si dica, *senza calcolare esplicitamente i residui nei poli* z_1, z_2, z_3, z_4, per quali valori di n l'integrale vale 0.

   (b) Se $f(x) = x^n e^{i\omega x}$, con ω reale e n intero, è possibile concludere che l'integrale è nullo (*senza calcolare esplicitamente i residui nei poli* z_1, z_2, z_3, z_4)? Per quali n e per quali ω?

3. (16 punti) Si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) = \frac{e^{i\omega z}}{z^3(1+iz\omega)}$, con ω reale.

   (a) Si calcoli lo sviluppo in serie di Laurent (i coefficienti in potenze negative di z) di $f(z)$ attorno al punto $z = 0$.

   (b) Si calcoli l'integrale, per tutti i valori reali di ω:
$$g_1(\omega) = \mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^3(1+ix\omega)}dx,$$
dove P rappresenta la parte principale attorno al punto $x = 0$.

   (c) Si calcoli l'integrale, per tutti i valori reali di ω:
$$g_2(\omega) = \mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)\, e^{i\omega x}}{x^3(1+ix\omega)}dx,$$
dove P rappresenta la parte principale attorno al punto $x = 0$.

   (d) Si disegnino i grafici di $|g_1(\omega)|$ e $|g_2(\omega)|$, in funzione della variabile reale ω