Esame parziale Istituzioni di metodi matematici della fisica. Università di Ferrara

June 12, 2015

1. (15 punti)
   Sia S un operatore autoaggiunto in $L^2(-\pi,\pi)$ e si consideri l'operatore
   $$T \equiv e^{aS} = 1 + (aS) + \frac{(aS)^2}{2!} + ...$$
   con $a \in C$.

   - Considerando la serie al 1^o e al 2^o ordine in a si dica se:
     - Esistono valori di a per cui T e' autoaggiunto? Quali?
     - Esistono valori di a per cui T e' unitario? Quali?
     - Esistono valori di a per cui T e' contemporaneamente autoaggiunto e unitario? Quali?
   - Se S possiede una base di autovettori, e' vero che T possiede una base di autovettori?
   - Si consideri l'operatore T costruito come sopra, partendo da $S = -i\frac{d}{dx}$.
     - Si scriva esplicitamente l' azione di T su una base di $L^2(-\pi,\pi)$, sommando *tutti* i termini della serie. Per quali valori di a accade che $T = I$ sulla base?
     - Sia data una funzione $f(x)$ in $L^2(-\pi,\pi)$ che possieda una estensione analitica a tutto il piano complesso. Si scriva il risultato della serie T applicata a tale funzione $f(x)$ e si dica a cosa converge la somma di tutta la serie.
     - Si trovi una condizione su tale f affinche' T sia unitario per ogni a immaginario.
   - Se sono dati due operatori autoaggiunti S_1 e S_2, e' vero che $e^{S_1}e^{S_2} = e^{S_2}e^{S_1}$? Se no, trovare due operatori S_1 e S_2 sulle precedenti funzioni $f(x)$, che facciano da controesempio.

2. Si consideri $f_\epsilon(x) = \frac{1}{(x-i\epsilon)^2}$, con $\epsilon > 0$ e con $x \in R$.

- Si dica (senza effettuare il calcolo) se la sua trasformata di Fourier è continua, $L2$ e se è a decrescenza rapida.
- Si calcoli la sua trasformata di Fourier $\hat{f}_\epsilon(\omega)$. A cosa converge puntualmente la $\hat{f}_\epsilon(\omega)$ per $\epsilon \to 0$? E uniformemente? E in senso L2?
  (*) E in senso S'? (*si giustifichino tutte le risposte*).
- Siano f_ϵ^R e f_ϵ^I le parti reale e immaginaria di f_ϵ e si calcolino le $\hat{f}_\epsilon^R$ e $\hat{f}_\epsilon^I$ separatamente. A quale distribuzione tende la $f_\epsilon^I(x)$ per $\epsilon \to 0$? Esiste il limite della $f_\epsilon^R(x)$ per $\epsilon \to 0$?
- (*) Si dimostri che in senso S' vale:

$$lim_{\epsilon \to 0} \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} = P\frac{1}{x}$$

  dove P è la parte principale di Cauchy in $x = 0$
- (*) A cosa tende in senso S' la f_ϵ^R per $\epsilon \to 0$ (si usi la distribuzione $P\frac{1}{x}$)?
- (*) A cosa tende in senso S' la $g_\epsilon(x) \equiv \frac{1}{(x-i\epsilon)^n}$ per $\epsilon \to 0$ e per n intero arbitrario?