Secondo Esame parziale Istituzioni di metodi matematici della fisica. Università di Ferrara

June 16, 2014

1. Si consideri
$$f(x) = \frac{x}{i\epsilon + x^2} \qquad (\epsilon > 0) \tag{1}$$
   - la trasformata $\hat{f}(\omega) \in \mathrm{L}^2(R)$?
   - $\omega\hat{f}[w] \in \mathrm{L}^2(R)$? È continua?

   Si consideri
$$h(x) = f(x)(1 + \theta(x-1) - \theta(x+1)) \tag{2}$$
   - la trasformata $\hat{h}(\omega) \in \mathrm{L}^2(R)$? $\in \mathrm{L}^1(R)$?
   - $\omega g[w] \in \mathrm{L}^2(R)$? E continua? $\in \mathrm{L}^1(R)$?
   - BONUS: si calcoli la trasformata di $f(x)$ e la trasformata di $sin(x)f(x)$. Si consideri il limite $\epsilon \to 0$: $\in \mathrm{L}^2(R)$?

2. Sia dato l'operatore definito sulle funzioni $L^2(-\pi, \pi)$:
$$T(sin(nx)) = (-1)^n \frac{sin(nx)}{n} \qquad T(cos(nx)) = \frac{cos(nx)}{n^{1/4}} \qquad T(1) = 0$$
   - Quale e' il dominio dell'operatore? Le funzioni dispari di Im[T] sono continue (se non lo sono trovare un controesempio)? Le funzioni pari di Im[T] sono continue (se non lo sono trovare un controesempio)?
   - Le funzioni dispari di Im[T] formano un sottospazio di Hilbert (completo)? Le funzioni dispari di Im[T] formano un sottospazio di Hilbert (completo)? sono un sottoinsieme denso? Im[T e' un sottoinsieme denso?
   - Trovare autovalori e autovettori di T

3. Si considerino le funzioni:
$$f_\tau(x) = 1/\sqrt{\tau} \qquad \mathrm{per}|x| < \tau$$
   e zero altrove

- Per $\tau \to \infty$ le $f_\tau(x)$ convergono puntualmente?
- Per $\tau \to \infty$ le $f_\tau(x)$ convergono uniformemente?
- Per $\tau \to \infty$ le $f_\tau(x)$ convergono in senso L2?
- E per $\tau \to 0$, convergono puntualmente, uniformemente, in senso L2? Convergono alla $\delta(0)$ di Dirac?