

# Esame scritto Istituzioni di metodi matematici della fisica. Università di Ferrara

September 30, 2014

1. Si considerino gli operatori che agiscono sulle funzioni  $f(x)$  appartenenti a  $L^2(-\pi, \pi)$  nel modo seguente:  $Tf(x) = e^{ix}f(x)$   $Sf(x) = id/dx f(x)$ 
  - T ed S sono operatori unitari? Sono autoaggiunti o possono essere resi autoaggiunti su qualche sottospazio?
  - Si risponda alla stessa domanda per gli operatori  $ST$  e  $TS$ .
  - Considerando l'operatore  $O=ST$ , si trovi la sua azione sulla base  $e_n = e^{inx}$  di  $L^2(-\pi, \pi)$ .
  - Si trovi il Ker (O)
  - Si trovino autovettori e autovalori di  $O$ .
  - Si dica se gli autovettori di  $O$  sono funzioni continue.
2. (8 punti) Si calcoli il seguente integrale con il metodo dei residui:

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/6}}{1+x^4} dx$$

3. (8 punti) Si consideri

$$f(x) = 0 \quad \text{per} \quad x < a$$

e

$$f(x) = 1/x^2 \quad \text{per} \quad x \geq a,$$

con  $a > 0$ .

4. Esiste la trasformata  $\hat{f}(\omega)$ ?  $\hat{f}(\omega)$  appartiene a  $L^2$  e a  $L^1$ ?
5. Quanto vale  $\int_0^\infty |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$ ?
6. Calcolare  $\mathcal{F}^{-1}(\omega \hat{f}(\omega))$
7. Esiste la  $\hat{f}$  se  $a \rightarrow 0$ ? E la  $\mathcal{F}^{-1}(\omega \hat{f}(\omega))$ ?