

Esame scritto Istituzioni di metodi matematici della
fisica. Università di Ferrara

September 30, 2014

1. Si considerino gli operatori che agiscono sulle funzioni $f(x)$ appartenenti a $L^2(-\pi, \pi)$ nel modo seguente: $Tf(x) = e^{ix}f(x)$ $Sf(x) = id/dxf(x)$
 - T ed S sono operatori unitari? Sono autoaggiunti o possono essere resi autoaggiunti su qualche sottospazio?
 - Si risponda alla stessa domanda per gli operatori ST e TS .
 - Considerando l'operatore $O=ST$, si trovi la sua azione sulla base $e_n = e^{inx}$ di $L^2(-\pi, \pi)$.
 - Si trovi il Ker (O)
 - Si trovino autovettori e autovalori di O .
 - Si dica se gli autovettori di O sono funzioni continue.

2. (8 punti) Si calcoli il seguente integrale con il metodo dei residui:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{1/6}}{1+x^4} dx$$

3. (8 punti) Si consideri

$$f(x) = 0 \quad \text{per} \quad x < a$$

e

$$f(x) = 1/x^2 \quad \text{per} \quad x \geq a,$$

con $a > 0$.

4. Esiste la trasformata $\hat{f}(\omega)$? $\hat{f}(\omega)$ appartiene a L^2 e a L^1 ?
5. Quanto vale $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$?
6. Calcolare $\mathcal{F}^{-1}(\omega \hat{f}(\omega))$
7. Esiste la \hat{f} se $a \rightarrow 0$? E la $\mathcal{F}^{-1}(\omega \hat{f}(\omega))$?