Prova scritta di Geometria per Fisica 23/06/2021
Tempo a disposizione: 2 ore e mezza

Esercizio 1. (6 punti) Discutere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} tx + (1-t)y + z = 2; \\ -4x + ty = -2t + 4; \\ -2x + (t-1)y + z = -4; \end{cases}$$

al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. (8 punti) Si consideri la funzione lineare $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\phi(x, y, z) = (x + y, x - z, y + z).$$

(a) Stabilire se la matrice di ϕ nella base canonica è diagonalizzabile.
(b) Calcolare la dimensione e una base dell'immagine di ϕ.

Esercizio 3. (7 punti) Nello spazio euclideo si considerino i seguenti punti:

$$O = (0, 0, 0), A = (0, 1, 1), B = (1, 0, 1), C = (1, 1, 0).$$

(a) Calcolare l'equazione del piano π determinato dai punti A, B, C.
(b) Calcolare l'equazione del piano π' che passa per O e per A ed è ortogonale al piano π.
(c) Calcolare la distanza dal punto C al piano π'.

Esercizio 4. (6 punti) In $\mathbb{R}^4$, con il prodotto scalare standard, si consideri il sottospazio vettoriale W generato dai vettori

$$v_1 = (1, -1, 1, 1), \qquad v_2 = (1, 0, 0, 1).$$

(a) Calcolare una base ortonormale $\mathcal{B}$ di W.
(b) Completare $\mathcal{B}$ ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 5. (6 punti)

(a) Dare la definizione di matrici simili.
(b) Dimostrare che una matrice è simile a se stessa (cioè la relazione di similitudine tra matrici è riflessiva).
(c) Dimostrare che se una matrice A è simile ad un altra matrice B, allora anche B è simile ad A (cioè la relazione di similitudine è simmetrica).
(d) Dimostrare che se una matrice A è simile ad una matrice B, e B è simile ad una matrice C, allora A è simile a C (cioè la relazione di similitudine è transitiva).

Soluzioni

Esercizio 1. Per $t \neq 2, 4$ il sistema ha un'unica soluzione. Per $t = 2$ il sistema non ha soluzione. Per $t = 4$ il sistema ha ∞^1 soluzioni.

Esercizio 2. (a) Non è diagonalizzabile. (b) La dimensione è 2 e una base è $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$.

Esercizio 3. (a) $x + y + z - 2 = 0$. (b) $y - z = 0$. (c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 4. (a) $\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1, 0) \right\}$.
(b) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1) \right\}$.

Esercizio 5. (a) Due matrici A e B sono simili se esiste una matrice invertibile M tale che $B = M^{-1}AM$.
(b) $A = I^{-1}AI$, dove I è la matrice identità .
(c) Se $B = M^{-1}AM$, allora $A = MBM^{-1} = (M^{-1})^{-1}BM^{-1}$.
(d) Se $B = M^{-1}AM$ e $C = N^{-1}BN$, allora $C = (MN)^{-1}A(MN)$.