Soluzioni della prova scritta di Geometria per Fisica, 8 gennaio 2021

Esercizio 1 (7 punti)

Discutere il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} kx + 2y + z = 1, \\ 2x + y - 2kz = -1, \\ 3x - y - kz = 2k, \end{cases}$$

al variare del parametro reale k.
Determinare l'insieme delle soluzioni del sistema quando $k = -1$.

Soluzione. La matrice incompleta del sistema lineare è

$$\begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2k \\ 3 & -1 & -k \end{pmatrix}$$

che ha determinante

$$-k^2 - 12k - 2 - 3 - 2k^2 + 4k = -3k^2 - 8k - 5 = -(3k + 5)(k + 1),$$

le cui radici sono $k_1 = -5/3$ e $k_2 = -1$.

Quindi per $k \neq -5/3, -1$ la matrice incompleta ha rango 3, ne segue necessariamente che la matrice completa ha rango 3 e possiamo concludere con il teorema di Rouchè-Capelli che il sistema ammette una e una sola soluzione.

Per $k = -5/3$, sostituendo nella matrice completa troviamo che

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5/3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 10/3 & -1 \\ 3 & -1 & 5/3 & -10/3 \end{array}\right)$$

ha rango 3, per esempio perché la sottomatrice

$$\begin{pmatrix} -5/3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -10/3 \end{pmatrix}$$

ha determinante

$$50/9 - 6 - 2 - 3 + 5/3 + 40/3 = 86/9 \neq 0$$

quindi il sistema non ha soluzione per il teorema di Rouché-Capelli.

Per $k = -1$, la matrice completa diveneta

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

che riduciamo a gradini:

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

cioè il rango della matrice completa è pure 2 e quindi per il teorema di Rouché-Capelli il sistema lineare è compatibile e ha infinite soluzioni, cioè l'insieme di soluzioni ha dimensione $3-2=1$ ed è una retta affine, che si trova risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 5y+4z=1, \\ x=2y+z-1 \end{cases} \quad \rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3}{5}-\dfrac{3}{5}t, \\ y=\dfrac{1}{5}-\dfrac{4}{5}t, \\ z=t, \end{cases}$$

cioè l'insieme di soluzioni è la retta passante per il punto $P(-3/5, 1/5, 0)$ e giacitura $\langle(3,4,-5)\rangle$.

Esercizio 2 (10 punti)

(i) Dimostrare che i vettori $v_1=(1,0,1,0)^T$, $v_2=(1,1,0,0)^T$, $v_3=(0,0,1,1)^T$, $v_4=(0,1,1,0)^T$ formano una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$.

(ii) Mostrare che i vettori $w_1=(1,-1,1)^T$, $w_2=(1,1,1)^T$, $w_3=(1,1,-1)^T$ formano una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$.

(iii) Sia $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$F(v_1)=(2,2,0)^T, \quad F(v_2)=(2,0,0)^T, \quad F(v_3)=(2,0,2)^T, \quad F(v_4)=(1,-1,3)^T.$$

Determinare la matrice A che rappresenta F rispetto alla basi $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$.

(iv) Calcolare la matrice $B=AA^T$, dove A^T è la matrice trasposta di A.

(v) Dire se la matrice B è diagonalizzabile.

Soluzione.

(i) I vettori v_1, v_2, v_3, v_4 formano una base di $\mathbb{R}^4$ se e solo se generano $\mathbb{R}^4$ o equivalentemente se e solo se sono linearmente indipendenti, ovvero se e solo se il sistema lineare omogeneo nelle incognite x, y, z, t

$$xv_1+yv_2+zv_3+tv_4=(0,0,0,0)^T$$

ha solo la soluzione nulla. La matrice incompleta associata al sistema lineare omogeneo è esattamente la matrice che ha come colonne i 4 vettori:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

di cui possiamo calcolare il determinante sviluppando per esempio lungo l'ultima riga:

$$-1 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -(1+1) = -2 \neq 0$$

cioè la matrice incompleta ha rango massimo 4 e il vettore nullo è l'unica soluzione.

(ii) I vettori w_1, w_2, w_3 formano una base di $\mathbb{R}^3$ se e solo se generano $\mathbb{R}^3$ o equivalentemente se e solo se sono linearmente indipendenti, ovvero se e solo se il sistema lineare omogeneo nelle incognite x, y, z

$$xw_1 + yw_2 + zw_3 = (0,0,0)^T$$

ha solo la soluzione nulla. La matrice incompleta associata al sistema lineare omogeneo è esattamente la matrice C che ha come colonne i 3 vettori:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

che ha determinante

$$-1 + 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = -4 \neq 0$$

cioè la matrice incompleta ha rango massimo 3 e il vettore nullo è l'unica soluzione.

(iii) La matrice A' associata alla funzione lineare F rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ e la base canonica di $\mathbb{R}^3$ ha per colonne ordinatamente i vettori immagini dei 4 vettori della base:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene la matrice cercata A moltiplicando a sinistra per la matrice di cambiamento di base dalla canonica alla base $\mathcal{C}$, che è l'inversa della matrice C di cambiamento dalla base $\mathcal{C}$ alla base canonica, che abbiamo già calcolato prima. Calcoliamo l'inversa della matrice C:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Indicata con C^{-1} l'inversa della matrice C, si conclude che la matrice cercata A è

$$A = C^{-1}A' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(iv) La matrice B è

$$B = AA^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(v) La matrice B è (ortogonalmente) diagonalizzabile perché è simmetrica.

Esercizio 3 (8 punti)

Nello spazio euclideo si considerino i seguenti punti:

$$A = (1, 0, 1), \qquad B = (0, -2, -1), \qquad C = (-1, -1, 1), \qquad D = (2, 1, -1).$$

(i) Determinare equazioni parametriche e cartesiane del piano Π passante per A, B, C.
(ii) Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per D e ortogonale al piano Π.
(iii) Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per C e D.
(iv) Determinare equazioni parametriche e cartesiane del piano, se esiste, passante per C, D e parallelo alla retta passante per A e B.

Soluzione.

(i) La retta passante per A e B ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2t, \\ z = 1 + 2t, \end{cases}$$

e quindi equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 2x - y = 2, \\ y - z = -1, \end{cases}$$

perciò i piani che contengono la retta passante per A e B hanno equazione cartesiana

$$\lambda(2x - y - 2) + \mu(y - z + 1) = 0$$

e imponendo il passaggio per il punto C troviamo

$$-3\lambda - \mu = 0, \qquad \text{cioè } \mu = -3\lambda.$$

Si conclude che il piano Π passante per A, B e C ha equazione cartesiana

$$2x - 4y + 3z = 5$$

e quindi equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{2} + 2t - \dfrac{3}{2}s, \\ y = t, \\ z = s, \end{cases}$$

(ii) La retta passante per D e ortogonale al piano Π ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = 1 - 4t, \\ z = -1 + 3t, \end{cases}$$

da cui si ricavano equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ 3x - 2z = 8. \end{cases}$$

(iii) La retta passante per C e D ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = -1 - 2t, \end{cases}$$

e quindi equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ y + z = 0. \end{cases}$$

(iv) I piani che contengono la retta passante per C e D hanno equazione cartesiana

$$\lambda(2x - 3y - 1) + \mu(y + z) = 0, \qquad \text{ovvero} \qquad (2\lambda)x + (-3\lambda + \mu)y + \mu z - \lambda = 0$$

e imponendo la condizione di parallelismo con la retta passante per A e B si conclude che

$$2\lambda + 2(-3\lambda + \mu) + 2\mu = 0, \qquad \text{cioè } \mu = \lambda.$$

Si conclude che il piano cercato ha equazione cartesiana

$$2x - 2y + z = 1.$$

Esercizio 4 (7 punti)

Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e la funzione lineare $G\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ associata ad A rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$.

(i) Determinare il nucleo V e l'immagine W di G.
(ii) Determinare basi ortonormali per V e per il suo complemento ortogonale $V^\perp$.
(iii) Determinare le proiezioni ortogonali del vettore $u = (0, 1, 1, 1)^T$ su V e su $V^\perp$.

Soluzione.

(i) Riduciamo a gradini la matrice A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui segue che il nucleo V ha dimensione 2 e base $\{(1, 0, -1, 0)^T, (0, 1, 0, -1)^T\}$, mentre l'immagine W ha dimensione 2 e base $\{(1, 2, 1)^T, (2, 1, -1)^T\}$.

(ii) La base $\{(1, 0, -1, 0)^T, (0, 1, 0, -1)^T\}$ è già ortogonale quindi una base ortonormale di V è

$$\left\{ v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)^T, v_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T \right\}$$

mentre una base di $V^\perp$ è

$$\{(1, 0, 1, 0)^T, (0, 1, 0, 1)^T\}$$

che è già ortogonale, quindi una base ortonormale di $V^\perp$ è

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T, \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T \right\}.$$

(iii) La proiezione ortogonale di $u = (0,1,1,1)^T$ su V è

$$\langle u, v_1\rangle v_1 + \langle u, v_2\rangle v_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} v_1 = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)^T$$

quindi la proiezione ortogonale di u su $V^\perp$ è

$$(0,1,1,1)^T - \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)^T = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1\right)^T.$$