Soluzioni della prova scritta di Geometria per Fisica, 15 luglio 2020

Esercizio 1. (12 punti) Data l'applicazione lineare $T_k \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$T_k(x, y, z) = (x - y, ky - x + (1 - k)z, 2kz + (k + 1)y)$$

al variare del parametro reale k,

(i) scrivere la matrice A associata a T_k nelle basi canoniche;

(ii) determinare per quali valori di k l'applicazione T_k è invertibile e per uno di tali valori di k trovare l'inversa di T_k;

(iii) per un valore di k tale che T_k non è invertibile, determinare la dimensione, una base ed equazioni parametriche e cartesiane del nucleo e dell'immagine di T_k;

(iv) per $k = 1$, determinare autovalori e autospazi di T_1 e dire se è diagonalizzabile;

(v) determinare per quali valori di k la matrice A è associata ad una forma quadratica $q \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; per uno di tali valori di k, determinare la segnatura di q.

Esercizio 2. (6 punti) Si consideri il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} ky + x - z = 1, \\ kz + x + y = 0, \\ (k - 1)z - y = 1, \end{cases}$$

al variare del parametro reale k. Determinare per quali valori di k il sistema è risolubile e, per tali valori di k, trovare l'insieme delle soluzioni.

Esercizio 3. (8 punti) Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito come insieme di soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x - y - z + 2w = 0, \\ 3x + z - 2w = 0, \\ x + 2y - 3w = 0. \end{cases}$$

(i) Determinare la dimensione e una base di V.

(ii) Trovare una base ed equazioni cartesiane del complemento ortogonale $V^\perp$ di V.

(iii) Determinare una base ortonormale di $V^\perp$.

(iv) Determinare le proiezioni ortogonali del vettore $u = (1, 2, 1, 1)^T$ su V e su $V^\perp$.

Esercizio 4. (8 punti) Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si considerino i seguenti punti: $A = (-1, 3/2, -1/2)$, $B = (-1/2, 1, 0)$, $C = (0, -2, 1)$, $D = (1, 0, 1)$, $E = (1, 3, 0)$.

(i) Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per i punti A, B e del piano π passante per i punti C, D, E.

(ii) Determinare la posizione relativa di r e π.

(iii) Determinare, se esiste, un piano contenente la retta r ed ortogonale al piano π.

(iv) Fissato punto P della retta r a vostra scelta, determinare il punto Q del piano π che ha distanza minima da P.

Soluzione dell'esercizio 1

Punto (i). Indichiamo con $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Allora

$$\begin{aligned} T_k(e_1) &= (1, -1, 0), \\ T_k(e_2) &= (-1, k, k+1), \\ T_k(e_3) &= (0, 1-k, 2k), \end{aligned}$$

che sono rispettivamente i tre vettori colonna della matrice associata a T_k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & k & 1-k \\ 0 & k+1 & 2k \end{pmatrix}.$$

Punto (ii). L'applicazione lineare T_k è invertibile se e solo se la matrice A è invertibile, il che accade se e solo se il determinante di A è diverso da 0. Il determinante di A è

$$\det(A) = 2k^2 - (1-k)(k+1) - 2k = 3k^2 - 2k - 1 = (3k+1)(k-1)$$

che è diverso da 0 se e solo se $k \neq -1/3, 1$. Per $k = 0$, la matrice A associata a T_0 è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

di cui calcoliamo l'inversa:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

cioè la matrice inversa è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui segue che l'applicazione lineare $(T_0)^{-1}$, inversa di T_0 è

$$(T_0)^{-1}(x, y, z) = (x + z, z, x + y + z).$$

Punto (iii). Per $k = 1$, la matrice A è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Siccome il rango della matrice è 2, si ha che l'immagine di T_1 ha dimensione 2 e una base è formata per esempio dai vettori $(1, -1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, che sono rispettivamente la prima colonna e la terza colonna diviso 2. Quindi equazioni parametriche dell'immagine di T_1 sono

$$\begin{cases} x = t, \\ y = -t, \\ z = s, \end{cases}$$

dove t, s sono i due parametri, da cui si ricava l'equazione cartesiana eliminando i parametri:

$$x + y = 0.$$

Per il teorema della dimensione si ha che la dimensione del nucleo di T_1 è $3 - 2 = 1$. Dalla riduzione a gradini della matrice si trovano equazioni cartesiane del nucleo di T_1:

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ y + z = 0, \end{cases}$$

da cui si ricavano equazioni parametriche risolvendo il sistema lineare: per esempio, ponendo $y = t$, si trova

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t, \\ z = -t, \end{cases}$$

dove t è il parametro, da cui si conclude che una base del nucleo di T_1 è formata dal vettore $(1, 1, -1)$.

Punto (iv). Per $k = 1$, il polinomio caratteristico della matrice A è

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1) = -\lambda(\lambda - 2)^2$$

quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$ con molteplicità algebrica 1 e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica 2. Gli autospazi sono rispettivamente

$$V_0(A) = \ker(A) = \ll (1, 1, -1) \gg,$$

$$V_2(A) = \ker(A - 2I) = \ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ll (0, 0, 1) \gg .$$

Siccome la molteplicità geometrica dell'autovalore 2 è 1 ed è strettamente minore della molteplicità algebrica, che era 2, si conclude che la matrice A non è diagonalizzabile.

Punto (v). La matrice A è simmetrica se e solo se $k + 1 = 1 - k$, cioè se e solo se $k = 0$. Per $k = 0$, la forma quadratica associata alla matrice è

$$q(x, y, z) = x^2 - 2xy - 2yz.$$

Seguendo per esempio il metodo di Gauss, si trova:

$$q(x, y, z) = (x - y)^2 - y^2 - 2yz = (x - y)^2 - (y + z)^2 + z^2,$$

quindi la forma quadratica q ha segnatura $(2, 1)$.

Soluzione dell'esercizio 2

La matrice completa del sistema lineare è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & -1 & k-1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & k-1 & -1-k & 1 \\ 0 & 1 & 1-k & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1-k & -1 \\ 0 & k-1 & -1-k & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1-k & -1 \\ 0 & 0 & k(k-3) & k \end{array}\right)$$

Se $k = 0$, il sistema lineare ha matrice associata

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

e il rango della matrice incompleta è 2, che è uguale al rango della matrice completa, quindi per il teorema di Rouché-Capelli il sistema ha soluzione e l'insieme delle soluzioni è una retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - z = 1, \\ y + z = -1, \end{cases}$$

da cui si ricavano equazioni parametriche ponendo per esempio $z = t$:

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -1 - t, \\ z = t, \end{cases}$$

cioè l'insieme delle soluzioni è $(1, -1, 0)+ \ll (1, -1, 1) \gg$.

Se $k = 3$, il sistema lineare ha matrice associata

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

quindi il rango della matrice incompleta è 2, mentre il rango della matrice completa è 3, perciò il sistema lineare non ha soluzioni per il teorema di Rouché-Capelli.

Per $k \neq 0, 3$, la matrice incompleta del sistema lineare ha rango 3, uguale al rango della matrice completa, quindi il sistema lineare ha una e una sola soluzione per il teorema di Rouché-Capelli. Dalla terza equazione si ricava

$$z = \frac{k}{k(k-3)} = \frac{1}{k-3}.$$

Sostituendo nella seconda equazione, si trova

$$y = -1 + (k-1)\frac{1}{k-3} = \frac{3 - k + k - 1}{k-3} = \frac{2}{k-3}$$

e infine dalla prima equazione si conclude che

$$x = -\frac{2}{k-3} - k\frac{1}{k-3} = -\frac{k+2}{k-3}$$

cioè l'unica soluzione del sistema lineare è

$$\left(-\frac{k+2}{k-3}, \frac{2}{k-3}, \frac{1}{k-3}\right).$$

Soluzione dell'esercizio 3

Punto (i). Risolviamo il sistema lineare dato, che ha matrice (incompleta) associata

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -8 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3, quindi l'insieme delle soluzioni V è un sottospazio vettoriale di dimensione $4-3=1$. Ponendo $w=1$, la terza equazione implica $z=1$. Allora la seconda equazione implica

$$3y = 5 - 1 = 4, \qquad \text{cioè} \quad y = \frac{4}{3}.$$

La prima equazione infine implica

$$x = -2 + 1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}.$$

Si conclude che una base di V è il vettore

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1, 1\right)$$

ovvero il vettore $v = (1,4,3,3)$.

Punto (ii). I calcoli precedenti implicano che la dimensione del complemento ortogonale $V^\perp$ di V è $4-1=3$ e una base di $V^\perp$ è

$$\{(1,-1,-1,2), (3,0,1,-2), (1,2,0,-3)\},$$

mentre un'equazione cartesiana di $V^\perp$ è

$$x + 4y + 3z + 3w = 0.$$

Punto (iii). Dall'equazione cartesiana appena trovata possiamo calcolare un'altra base conveniente di $V^\perp$, per esempio

$$\{(4,-1,0,0), (0,0,1,-1), (3,0,-1,0)\}.$$

Usando il procedimento di Gram-Schmidt, troviamo una base ortonormale di $V^\perp$:

$$\begin{aligned} v_1 &= (4,-1,0,0), \\ v_2 &= (0,0,1,-1) - \frac{0}{17}(4,-1,0,0) = (0,0,1,-1), \\ v_3 &= (3,0,-1,0) - \frac{-1}{2}(0,0,1,-1) - \frac{12}{17}(4,-1,0,0) = \left(\frac{3}{17}, \frac{12}{17}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

ovvero una base ortogonale di $V^\perp$ è

$$\{(4,-1,0,0), (0,0,1,-1), (6,24,-17,-17)\}$$

da cui si ricava una base ortonormale di $V^\perp$:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{17}}(4,-1,0,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1), \frac{1}{\sqrt{1190}}(6,24,-17,-17) \right\}.$$

Punto (iv). Una base ortonormale di V è
$$\left\{\frac{1}{\sqrt{35}}\,(1,4,3,3)\right\},$$
quindi la proiezione ortogonale del vettore $u=(1,2,1,1)$ su V è
$$u_1=\frac{15}{35}\,(1,4,3,3)=\frac{3}{7}\,(1,4,3,3)=\left(\frac{3}{7},\frac{12}{7},\frac{9}{7},\frac{9}{7}\right)$$
da cui si ricava che la proiezione ortogonale di u su $V^\perp$ è
$$u_2=u-u_1=(1,2,1,1)-\left(\frac{3}{7},\frac{12}{7},\frac{9}{7},\frac{9}{7}\right)=\left(\frac{4}{7},\frac{2}{7},-\frac{2}{7},-\frac{2}{7}\right).$$

Soluzione dell'esercizio 4

Punto (i). La retta r ha vettore direttore
$$v_r=A-B=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),$$
e passa per il punto B, quindi la retta r ha equazioni parametriche
$$\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\,t,\\ y=1+\dfrac{1}{2}\,t,\\ z=-\dfrac{1}{2}\,t,\end{cases}$$
da cui si ricavano le equazioni cartesiane per esempio ponendo $t=-2z$ e sostituendo nelle prime due equazioni si ricava
$$\begin{cases} x-z=-\dfrac{1}{2},\\ y+z=1,\end{cases}\qquad \text{ovvero}\qquad \begin{cases} 2x-2z=-1,\\ y+z=1.\end{cases}$$

La retta s passante per D ed E ha vettore direttore
$$v_s=E-D=(0,3,-1)\,,$$
e passa per il punto D, quindi ha equazioni parametriche
$$\begin{cases} x=1,\\ y=3t,\\ z=1-t,\end{cases}$$
da cui si ricavano le equazioni cartesiane per esempio ponendo $t=1-z$ e sostituendo nelle altre equazioni si ricava
$$\begin{cases} x=1,\\ y+3z=3.\end{cases}$$
Quindi il fascio di piani passanti per la retta s ha equazione cartesiana
$$\lambda(x-1)+\mu(y+3z-3)=0$$
con λ,μ non entrambi nulli. Imponendo il passaggio per il punto $C=(0,-2,1)$ si trova
$$-\lambda-2\mu=0$$

cioè $\lambda = -2\mu$ e, posto $\mu = 1$, si trova $\lambda = -2$ e il piano cercato π ha equazione cartesiana

$$-2x + y + 3z = 1$$

da cui si ricavano equazioni parametriche per esempio ponendo $y = t$ e $z = s$:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}s, \\ y = t, \\ z = s. \end{cases}$$

Punto (ii). Un vettore ortogonale al piano π è $(-2, 1, 3)$ che è ortogonale al vettore direttore $-2v_r = (1, -1, 1)$ infatti

$$-2 - 1 + 3 = 0.$$

Si conclude che r è parallela al piano π. Siccome per esempio $B = (-1/2, 1, 0)$ non appartiene al piano π, perché le coordinate di B non soddisfano l'equazione cartesiana di π:

$$(-2)\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 + 3 \cdot 0 = 1 + 1 = 2 \neq 1,$$

possiamo dire che r e π sono paralleli e disgiunti.

Punto (iii). Il fascio di piani passanti per la retta r ha equazione cartesiana

$$\lambda(2x - 2z + 1) + \mu(y + z - 1) = 2\lambda x + \mu y + (-2\lambda + \mu)z + (\lambda - \mu) = 0$$

con λ, μ non entrambi nulli. Imponendo l'ortogonalità con il piano π troviamo:

$$-4\lambda + \mu - 6\lambda + 3\mu = 0$$

ovvero $2\mu = 5\lambda$. Posto $\lambda = 2$, ne segue che $\mu = 5$ e il piano cercato ha equazione cartesiana

$$4x + 5y + z - 3 = 0.$$

Punto (iv). Scegliamo il punto $P = B = (-1/2, 1, 0)$. La retta ortogonale al piano π e passante per B ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} - 2t, \\ y = 1 + t, \\ z = 3t, \end{cases}$$

quindi possiamo trovare il punto Q di intersezione di tale retta con il piano π:

$$-2\left(-\frac{1}{2} - 2t\right) + (1 + t) + 3(3t) = 1$$

da cui si ricava $14t = -1$, ovvero $t = -1/14$ e il punto Q cercato è

$$\left(-\frac{5}{14}, \frac{13}{14}, -\frac{3}{14}\right).$$