02/03/2011,

(1)

Sia $L: V \to W$ con V, W spazi vettoriali $\Rightarrow L$ è un'APPLICAZIONE LINEARE se:

(1) $L(v_1+v_2)=L(v_1)+L(v_2) \quad \forall\, v_1, v_2 \in V$

$L(\alpha v) = \alpha L(v) \quad \forall \alpha \in K, \ \forall v \in V.$

DEFINIAMO IL NUCLEO DI L (Ker L):

$$\mathrm{Ker}L = \{v \in V \,/\, L(v)=0\} \leq V$$

oppure possiamo indicare il nucleo anche come controimmagine del vettore nullo: $\mathrm{Ker}L = L^{-1}(0)$

Possiamo dimostrare che kerL è un sottospazio vettoriale

DIMOSTRAZIONE: Dati $v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}L \Rightarrow v_1+v_2 \in \mathrm{Ker}L$, inoltre $\forall \alpha \in K \Rightarrow \alpha v_1 \in \mathrm{Ker}L$ e infine $0 \in \mathrm{Ker}L$; QUESTA È LA TESI.

Per verificare la prima affermazione dobbiamo far vedere che:

$$L(v_1+v_2) = L(v_1)+L(v_2) \quad \forall\, v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}L$$

quindi: per la proprietà delle applicazioni lineari abbiamo che:

$$L(v_1+v_2)=L(v_1)+L(v_2) = 0+0=0$$

inoltre sempre per la proprietà delle applicazioni lineari

$$L(\alpha v_1) = \alpha(L(v_1)) = \alpha \cdot 0 = 0$$

infine: $L(0)=0$ PERCHÉ È MORFISMO DI SPAZI VETTORIALI

Possiamo allora dire che il nucleo di un'applicazione lineare è un sottospazio vettoriale.

c.v.d.

PROPOSIZIONE: $\mathrm{Ker}L=\{0\} \Leftrightarrow L$ è iniettiva. (GIÀ DIMOSTRATA)

Definiamo ora così è l'<u>immagine di L</u>:

$$\mathrm{Im}L = L(V) = \{w \in W \,/\, \exists\, v \in V \text{ tale che } L(v)=w\}$$

(vuol dire almeno uno, altrimenti nel caso in cui avremmo voluto dire uno e un solo il simbolo usato sarebbe stato $\exists !$)

Possiamo far vedere che ImL è un sottospazio vettoriale di W

$$\mathrm{Im}L = \{w \in W \,/\, \exists\, v \in V \text{ tale che } L(v)=w\} \leq W$$

DIMOSTRAZIONE:

- $0_W \in ImL$ perchè $L(0_V) = 0_W$
- siano $w_1, w_2 \in ImL \Rightarrow \exists\, v_1, v_2 \in V \mid L(v_1) = w_1 \wedge L(v_2) = w_2$

$$\Rightarrow w_1 + w_2 = L(v_1) + L(v_2) = L(v_1 + v_2) \in ImL$$

- $\forall \alpha \in K$, $\alpha w_1 = \alpha L(v_1) = L(\alpha v_1) \in ImL$

c.v.d.

Esiste un legame fra le dimensioni di questi due sottospazi.

PROPOSIZIONE conosciuta come TEOREMA DELLE DIMENSIONI (o DIMENSIONALE)

DATA $L: V \to W$, con L lineare E con $\dim V = n$ $\Rightarrow \dim V = \dim \ker L + \dim ImL$

Il teorema è importante perchè è utile per rilevare la presenza di isomorfismi.

DIMOSTRAZIONE: Considero una base di kerL: $\mathcal{B}_{\ker L} = \{v_1, \dots, v_k\}$, $k \leq n$ e una base di ImL $\Rightarrow \mathcal{B}_{ImL} = \{w_1, \dots, w_p\} \subset W$, $p \leq \dim W$

allora siano $u_1, \dots u_p \in V \mid L(u_j) = w_j \quad \forall j = 1, \dots, p$.

Sia $w \in ImL \Rightarrow \exists\, v \in V \mid L(v) = w = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_p w_p = \alpha_1 L(u_1) + \alpha_2 L(u_2) + \dots + \alpha_p L(u_p) = L(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_p u_p)$

abbiamo quindi: $L(v) = L(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p)$

$$\Rightarrow L(v) - L(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p) = 0 \Rightarrow L(v - \alpha_1 u_1 - \dots - \alpha_p u_p) = 0$$

$\Rightarrow v - \alpha_1 u_1 - \dots - \alpha_p u_p \in \ker L$

pertanto $v - \alpha_1 u_1 - \dots - \alpha_p u_p = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k \Rightarrow v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p + \beta_1 v_1 + \dots \beta_k v_k$

abbiamo dimostrato che V ha $p + k$ generatori, quindi occorre dimostrare che sono una base, ovvero far vedere che sono linearmente indipendenti

$$\{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_k\} \text{ è un insieme di generatori di } V$$

Dimostriamo che sono linearmente indipendenti $\Rightarrow a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_p u_p + b_1 v_1 + \dots + b_k v_k = 0$ dobbiamo far vedere che OGNI a_i e b_j SONO NULLI:

$\Rightarrow L(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_p u_p + b_1 v_1 + \dots + b_k v_k) = L(0) = 0$

$a_1 L(u_1) + a_2 L(u_2) + \dots + a_p L(u_p) + b_1 \underset{0}{\underset{\parallel}{L(v_1)}} + \dots + b_k \underset{0}{\underset{\parallel}{L(v_k)}} = 0$

$a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_p w_p = 0 \Rightarrow a_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, p$ perchè $\{w_1, \dots, w_p\}$ è base di ImL

Quindi della nostra combinazione lineare di partenza resta:

$b_1 v_1 + \dots + b_k v_k = 0 \Rightarrow$ POICHÈ $\{v_1, \dots, v_k\}$ È BASE DI $\ker L$

$\Rightarrow b_\ell = 0 \quad \forall \ell = 1, \dots, k$ quindi $\{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_k\}$ è base di V

allora $\dim V = p + k = \dim \operatorname{Im} L + \dim \ker L$

c.v.d.

: Esistono isomorfismi tra $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$? cioè esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ biettiva?

Il teorema delle dimensioni ci aiuta a rispondere: in quanto se esistesse L biettiva allora la $\dim \ker L = 0$. Il teorema dimensionale ci dice $\dim \operatorname{Im} L = 2 - 0 = 2$ quindi non potrebbe essere SURIETTIVA! QUINDI NON UN ~~isomorfismo~~! Analogamente anche il caso DI UN'APPLICAZIONE LINEARE BIETTIVA $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ NON PUÒ ESISTERE, PERCHÈ SE FOSSE INIETTIVA AVREMMO: $\dim \operatorname{Im} L = 3 - 0 = 3$, MA $\operatorname{Im} L \leq \mathbb{R}^2 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} L \leq 2$!

cioè se volessimo creare un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la dimensione del nucleo non potrà mai essere zero, DUNQUE NON POTREBBE MAI ESSERE INIETTIVA.

CONCLUSIONE: Non possono esserci isomorfismi tra spazi di dimensioni diverse

Inoltre non possono esserci applicazioni lineari iniettive $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, ma esistono se $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

ESERCIZIO COMPITO DEL 11/02/2011

$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$(x, y, z, t) \to (x-y, x-z, x-t)$

Determinare il ~~ker~~ $\ker f$ e verificare se è iniettiva o meno.

Devo trovare quegli x, y, z, t tali che $x-y=0$, $x-z=0$, $x-t=0$

$$\ker f = \left\{ (x, y, z, t) \;\middle|\; \begin{cases} x-y=0 \\ x-z=0 \\ x-t=0 \end{cases} \right\}$$ cioè le soluzioni del sistema sono:

$$\begin{cases} y = x \\ z = x \\ t = x \end{cases}$$

la matrice associata è:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Con il determinante vediamo che il rango è 3, quindi cerchiamo una retta in $\mathbb{R}^4$ poichè $\dim = 4 - 3 = 1$

Il nucleo è ~~una~~ quindi una retta in $\mathbb{R}^4$ e f non è iniettiva ④

È suriettiva f? Dobbiamo vedere se $\dim \operatorname{Im} f$ è 3 allora è possibile.

Il teorema dimensionale ci dice che:

$$\dim \operatorname{Im} f = 4-1=3 \quad \text{quindi è SURIETTIVA}$$

Anche le applicazioni lineari possono essere studiate a partire dalle matrici associate, le quali possono essere infinite poiché si costruiscono a partire dalle basi degli spazi vettoriali.

Sia $L: V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare e $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V e $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_k\}$ base di W

Creo $L(v_1) = a_{11} w_1 + a_{12} w_2 + \dots + a_{k1} w_k$

$L(v_2) = a_{12} w_2 + a_{22} w_2 + \dots + a_{k2} w_k$

$\vdots$

$L(v_n) = a_{1n} w_1 a_{2n} w_2 + \dots + a_{kn} w_k$

Mettendo in colonna i coefficienti della combinazione lineare creo la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}_{k \times n} = [L]^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}_V}$$

nome dell'applicazione

codominio

dominio

Cambiando i vettori di base, varia la matrice poiché cambiano i coefficienti.

Ex

$L: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$(x,y,z,t) \to (x-y, x-z, x-t)$

Prendiamo le basi canoniche in $\mathbb{R}^4$ ed $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow L\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$L\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$

$$[L]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$L\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$

$L\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$

5

Determinare $[L]_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4}}^{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}$

dove $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

e $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$