Quando uso le operazioni elementari devo essere certo di non cambiare l'insieme delle soluzioni originario del sistema.

PROPOSIZIONE: Le operazioni elementari eseguite nelle equazioni di un sistema lineare Σ, cambiano formalmente il sistema dato in un nuovo sistema Σ', ma gli insiemi delle soluzioni dei due sistemi coincidono, cioè $Sol(\Sigma) = Sol(\Sigma')$

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo l'operazione elementare "scambio di equazione" e posto Σ' il sistema mutato da tale operazione
Facciamo vedere che $Sol(\Sigma) = Sol(\Sigma')$: DOBBIAMO DIMOSTRARE LA DOPPIA INCLUSIONE : $Sol(\Sigma) \subset Sol(\Sigma')$ e $Sol(\Sigma') \subset Sol(\Sigma)$
PER DIMOSTRARE CHE $Sol(\Sigma) \subset Sol(\Sigma')$,
Dobbiamo dimostrare che se $x_0 \in Sol(\Sigma) \Rightarrow x_0 \in Sol(\Sigma')$ $\forall x_0 \in Sol(\Sigma)$.
Essendo x_0 soluzione di ogni equazione di Σ allora è anche soluzione di ogni equazione di Σ', perché sono esattamente le stesse.

• Consideriamo ora l'operazione elementare: "moltiplicazione di una equazione di Σ per uno scalare" $a \in \mathbb{R}$, CIOÈ:

$$\text{Sia} \quad \Sigma = \begin{cases} R_1 = 0 \\ R_2 = 0 \\ \vdots \\ R_K = 0 \end{cases} \xrightarrow{R_J = aR_J} \begin{cases} R_1 = 0 \\ R_2 = 0 \\ \vdots \\ aR_J = 0 \\ \vdots \\ R_K = 0 \end{cases}$$

Sia $x_0 \in Sol(\Sigma)$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_1(x_0) \equiv 0 \\ R_2(x_0) \equiv 0 \\ \vdots \\ R_J(x_0) \equiv 0 \\ \vdots \\ R_K(x_0) \equiv 0 \end{cases} \qquad \text{Per } \Sigma': \begin{cases} R_1(x_0) \equiv 0 \\ \vdots \\ R_{J-1}(x_0) \equiv 0 \\ (aR_J)(x_0) = a\left(R_J(x_0)\right) = a \cdot 0 = 0 \\ \vdots \\ R_K(x_0) = 0 \end{cases}$$

x_0 è soluzione anche della nostra equazione moltiplicata per lo scalare a

$$\Rightarrow x_0 \in Sol(\Sigma')$$

②

- Consideriamo ora l'operazione elementare: "somma algebrica di due equazioni sostituita ad una delle due equazioni"

$$\Sigma: \begin{cases} R_1(x_0)=0 \\ R_2(x_0)=0 \\ \vdots \\ R_k(x_0)=0 \end{cases} \xRightarrow{R_J = R_i + R_J} \begin{cases} R_1(x_0)=0 \\ R_2(x_0)=0 \\ \vdots \\ R_i(x_0)=0 \\ \vdots \\ (R_i+R_J)(x_0)=0 \\ R_{J+i}(x_0)=0 \\ \vdots \\ R_K(x_0)=0 \end{cases}$$

$$(R_i+R_J)(x_0) = R_i(x_0)+R_J(x_0) = 0+0=0$$

POICHÈ x_0 è soluzione sia di $R_i(x)=0$ che di $R_J(x)=0$ $\Longrightarrow x_0 \in Sol(\Sigma')$

Esempio:

$$\begin{aligned} R_i(x) &= 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 1 = 0 \\ R_J(x) &= x_1 - x_2 \qquad\quad + 2 = 0 \\ \hline (R_i+R_J)(x) &= 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato che $Sol(\Sigma) \subset Sol(\Sigma')$, ma non basta, dobbiamo dimostrare ora che $Sol(\Sigma') \subset Sol(\Sigma)$

Le operazioni inverse delle nostre operazioni elementari, che riportano Σ' a Σ, sono ancora del tipo già studiato. Quindi abbiamo ANCHE già dimostrato che $Sol(\Sigma') \subset Sol(\Sigma)$

c.v.d

DEFINIZIONE

Due sistemi che hanno lo stesso insieme di soluzioni sono detti EQUIVALENTI.

③

ESEMPIO DI OPERAZIONE ELEMENTARE:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - 1 = 0 \\ \sqrt{2}x_1 - 2x_2 - x_4 + 2 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \xRightarrow{R_2 = \sqrt{2}R_1 - R_2} \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - 1 = 0 \\ 0 + (-\sqrt{2}+2)x_2 + 3\sqrt{2}x_3 + (-\sqrt{2}+1)x_4 - \sqrt{2} - 2 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Usiamo un metodo pesante, in pratica lavoriamo solo sui coefficienti, per questo si introduce l'uso della "matrice".

DEF: Una matrice è una tabella ordinata per righe e colonne di numeri (reali)

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

(Possiamo usare anche parentesi quadre)

Questa matrice ha 3 righe e 3 colonne, la chiamiamo matrice 3×3.

• Una matrice $k \times n$ è una tabella di numeri ordinati in k righe ed n colonne.

Esempio:

$$A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

(Si dice matrice "rettangolare" quando $k \neq n$)

(Se $k = n$ la matrice è detta "quadrata")

Come associare a Σ la matrice dei coefficienti del sistema?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ \sqrt{2} & -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

Prendo in ordine i coefficienti direttamente dal sistema, come se cancellassi semplicemente le variabili

La matrice completa del sistema è:

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)_{3\times 5}$$

Il termine noto viene riportato col segno cambiato, supponiamo di averlo portato al 2° membro nel sistema originale di equazioni.

Con la linea tratteggiata indichiamo la distinzione tra coefficienti e termini noti.

Posso ④ usare le operazioni elementari sulle RIGHE DELLE matrici e ricomporre solo alla fine il sistema, nella forma canonica.

Esempio:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Matrici che differiscono mediante operazioni elementari riga si dicono equivalenti

VOGLIAMO OTTENERE DEGLI ZERI NELLA PRIMA COLONNA AL DI SOTTO DELLA PRIMA ENTRATA DELLA MATRICE

$$\xrightarrow[R_3 = -R_1 + R_3]{R_2 = R_1 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Ottengo una nuova matrice equivalente a quella di partenza.

ORA VOGLIAMO ZERI NELLA COLONNA SOTTO IL PRIMO ELEMENTO NON NULLO DELLA SECONDA RIGA:

$$\xrightarrow{R_3 = 2R_2 + R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Ora il procedimento verso il basso è terminato, ho una forma a gradini della matrice.

Ho 3 pivots, dunque è una matrice di rango 3.

Inizio il procedimento in risalita: VOGLIAMO ZERI AL DI SOPRA DEI PIVOTS NELLE COLONNE CHE LI CONTENGONO:

$$\xrightarrow[R_1 = 4R_1 - 3R_3]{R_2 = 4R_2 - 3R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -4 & 0 & -10 & -11 \\ 0 & 4 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 = R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & -16 & -14 \\ 0 & 4 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Posso dividere per il pivots ogni riga:

$$\xrightarrow[R_2 = \frac{R_2}{4},\ R_3 = \frac{R_3}{4}]{R_1 = \frac{R_1}{4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \end{array}\right)$$

QUESTA È LA FORMA A GRADINI CANONICA DELLA MIA MATRICE:

LE COLONNE CHE CONTENGONO I PIVOTS CONTENGONO SOLO I PIVOTS

⑤ Ora posso ricomporre il sistema Σ':

$$\Sigma: \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 \qquad - x_4 = -2 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \Sigma': \begin{cases} x_1 \qquad -4x_4 = -\frac{7}{2} \\ x_2 \qquad -\frac{3}{2}x_4 = -\frac{3}{4} \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

La variabile x_4 è "libera" (indipendente), mentre x_1, x_2, x_3 sono variabili "legate" (dipendenti). → (quelle dei pivots)

$$= \begin{cases} x_1 = 4x_4 - \frac{7}{2} \\ x_2 = \frac{3}{2}x_4 - \frac{3}{4} \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_4 + \frac{5}{4} \end{cases}$$

Il rango della matrice coincide col numero di variabili legate.

POSSO DARE INFINITI VALORI ALLA VARIABILE LIBERA E TROVARE DI CONSEGUENZA INFINITI VALORI DELLE VARIABILI LEGATE E QUINDI LE SOLUZIONI CERCATE

Per $x_4 = 0$ ottengo $\left(-\frac{7}{2}, -\frac{3}{4}, +\frac{5}{4}, 0\right)$

Per $x_4 = 1$ ottengo $\left(4 - \frac{7}{2}, \frac{3}{2} - \frac{3}{4}, -\frac{1}{2} + \frac{5}{4}, 1\right)$

Tutte le quaterne che ottengo sono soluzioni del sistema

IN QUESTO CASO LE INFINITE SOLUZIONI TROVATE SONO IN CORRISPONDENZA CON I PUNTI DI UNA RETTA IN UNO SPAZIO QUADRIDIMENSIONALE: IL NUMERO DELLE VARIABILI LIBERE COINCIDE CON LA DIMENSIONE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI E TALE NUMERO È DATO DAL NUMERO TOTALE DELLE VARIABILI MENO IL NUMERO DELLE VARIABILI LEGATE CIOÈ QUINDI:

DIMENSIONE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI = NUMERO TOTALE DELLE VARIABILI − RANGO DELLA MATRICE

Nell'esempio siamo in $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$

Se ho 1 variabile libera ho un ∞^1 di soluzioni, cioè ho tante soluzioni del sistema quanti elementi ho in $\mathbb{R}$.
Se ne 2 avrò ∞^2 soluzioni.