Fisica 1° Anno Geometria 6/10/10

Sistemi Lineari

$\underline{x}$ = per

Cosa si intende $\underline{x}$ sistema lineare?

Un insieme di equazioni Lineari (:il cui polinomio ha grado 1)

I coefficienti appartengono a $\mathbb{R}$ ed anche le soluzioni appartengono a $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \overset{*}{\dots} + a_nx_n + a_{n+1} = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n + b_{n+1} = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ t_1x_1 + t_2x_2 + \dots + t_nx_n + t_{n+1} = 0 \end{cases}$$

n: è generale (può essere 10 come 125497) non sappiamo quanto vale ...*

: Questi puntini rappresentano solo altre 3 coefficienti (c, d, e) quindi non è generale.

Le equazioni si risolvono insieme, trovare una soluzione del sistema in $\mathbb{R}$ significa determinare una n-upla di numeri Reali che soddisfa ogni eq. del sistema, cioè sostituita alla n-upla delle variabili rende ogni eq. un'identità.

$x_1 x_2 \dots x_n$ sono incognite o variabile

Insiemi numerici: Non sono solo insiemi, ma strutture algebriche

$\mathbb{N}$ {Naturali}

$\mathbb{Z}$ {interi}

$\mathbb{Q}$ {Razionali}

$\mathbb{R}$ {Reali}

$\mathbb{C}$ {Complessi}

$$\Sigma: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \dots + a_{1n}x_n + b_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \dots + a_{2n}x_n + b_2 = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 \dots + a_{kn}x_n + b_k = 0 \end{cases}$$

Σ è un sistema di k eq. in n incognite

Σ è lineare se ogni eq. ha grado 1 (i coefficienti hanno grado 0)

Grado di Σ = prodotto dei gradi delle eq. $\Rightarrow$ tutti i gradi sono 1 quindi Σ è di grado 1

~~Omogeneità di Σ Σ se è tutto~~

DEFINIZIONE:

Σ è omogeneo di grado ℓ se tutte le eq. sono omogenee (cioè sono composte da monomi dello stesso grado ℓ)

Nel caso del sistema lineare Σ, questo è omogeneo se: $b_j = 0 \ \forall j = 1, \dots, n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \cdots a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 \cdots a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$ Sistema omogeneo

DEFINIZIONE

Se almeno uno dei b_j, $j = 1, \dots, n$ è diverso da zero, Σ è detto <u>non omogeneo</u>

Come si risolve un sistema lineare? CI SONO DIVERSI METODI:

AD ESEMPIO

Metodo di sostituzione

$$x_1 = \frac{-a_{12}x_2 \cdots - a_{1n}x_n - b_1}{a_{11}}$$

Si sostituisce a x la suddetta espressione

Metodo di eliminazione di Gauss

Operazioni Elementari: "operazioni" che cambiano formalmente le eq. di Σ fornendo un nuovo sistema Σ' in modo che le soluzioni di Σ' siano le stesse di Σ.
Posto $Sol\{\Sigma\} = \{$soluzioni di $\Sigma\}$ allora $Sol\{\Sigma\} = Sol\{\Sigma'\}$

Operazioni Elementari sulle eq. di Σ:

$\boxed{\text{Scalare}}$: si intende un valore preso nell'insieme numerico nel quale lavoriamo.

1) Scambio delle eq.
2) Moltiplicazione x uno scalare di tutti i monomi di un eq.
3) Somma algebrica (+ o -) di due eq.

Queste operazioni sono tese ad eliminare variabili nelle eq. sottostanti

TALI OPERAZIONI ELEMENTARI SI POSSONO ANCHE COMBINARE TRA LORO

ESEMPIO

$$\Sigma \begin{cases} \quad + 3x_2 \quad - x_3 - 1 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2 = 0 \end{cases}$$

Sistema lineare non omogeneo di 3 eq in 3 incognite

Scambio eq. (Operazione 1) : PERCHÉ VOGLIO CHE LA PRIMA VARIABILE, x_1, NELLA PRIMA EQUAZIONE ABBIA IL COEFFICIENTE $\neq 0$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ + 3x_2 - x_3 - 1 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2 = 0 \end{cases}$$

OGLIO ELIMINARE x_1 DALLE EQUAZIONI DIVERSE DALLA PRIMA : PERCIÒ Sommo le eq 1 e 3 quindi sostituisco il risultato alla eq. numero 3

OTTENGO:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ + 3x_2 - x_3 - 1 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + 2 = 0 \end{cases} \quad R_3' = -3R_3 \implies \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_2 - x_3 - 1 = 0 \\ -3x_2 + 6x_3 - 6 = 0 \end{cases}$$

Moltiplico l'eq. numero 3 x -3 Quindi sommo le eq 2 e 3 CIOÈ ESEMPLIFICANDO $\implies R_3'' = R_2' + R_3'$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ + 3x_2 - x_3 - 1 = 0 \\ + 5x_3 - 7 = 0 \end{cases}$$

orma a gradini del sistema

ssendo arrivati all'ultima eq. non posso più applicare il sistema di eliminazione i Gauss, in FORMA DISCENDENTE

bbiamo ottenuto la forma a gradini

DEFINIZIONE

n questa forma i primi coefficienti non nulli di ogni equazione si dicono

IVOTS

ell'esempio sopra abbiamo 3 PIVOTS sono : 1, 3, 5

DEFINIZIONE

l numero dei PIVOTS PRESENTI NELLA FORMA A GRADINI DELLA MATRICE si chiama Rango del Sistema

ell'esempio sopra il sistema ha rango 3.

Utilizzo ora il metodo di Eliminazione di Gauss in ascesa

$R_3''' = \frac{R_3'}{5} \Rightarrow \begin{cases} " \\ " \\ x_3 - \frac{7}{5} = 0 \end{cases}$

Ho moltiplicato $R_3 \times \frac{1}{5}$. ORA ELIMINO x_3 DALLE EQUAZIONI 1ª E 2ª

$R_2^{IV} = R_3''' + R_2''' \Rightarrow \begin{cases} " \\ 3x_2 - \frac{12}{5} = 0 \\ 5x_3 - \frac{7}{5} = 0 \end{cases}$

Ho sommato R_2 ed R_3 $\Rightarrow$

$R_1^{V} = R_1^{IV} + R_3''' \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + \frac{7}{5} = 0 \\ +3x_2 - \frac{12}{5} = 0 \\ x_3 - \frac{7}{5} = 0 \end{cases}$

Ho sommato R_1 ed R_3 $\Rightarrow$ $R_2 = R_2/3$

$\begin{cases} x_1 - x_2 + \frac{7}{5} = 0 \\ x_2 - \frac{4}{5} = 0 \\ x_3 - \frac{7}{5} = 0 \end{cases}$

Ho moltiplicato $R_2 \times \frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $R_1 = R_1 + R_2$

$\begin{cases} x_1 + \frac{7}{5} = 0 \\ x_2 - \frac{4}{5} = 0 \\ x_3 - \frac{7}{5} = 0 \end{cases}$

Ho sommato R_1 ed R_2

$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{5} \\ x_2 = \frac{4}{5} \\ x_3 = -\frac{7}{5} \end{cases}$