DIMOSTRARE: $Hom(V,W) = \{L : V \to W,\ L \text{ lineare}\}$ È UNO SPAZIO VETTORIALE

Operazioni: DEFINIAMO LA SOMMA DI APPLICAZIONI LINEARI:

$L_1 ; L_2$ applicazioni lineari $\Longrightarrow \underset{\uparrow \text{SOMMA IN } Hom(V,W)}{L_1 +' L_2}$ è applicazione (lineare) tale che

$L_1 +' L_2 : V \longrightarrow W$

$v \longmapsto (L_1 +' L_2)(v) = L_1(v) \underset{\text{SOMMA IN } W}{+} L_2(v)$

ESEMPIO

$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 2x+3$

$f+g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) + g(x)$

VERIFICHIAMONE LE PROPRIETÀ:

1) ASSOCIATIVA: $(L_1 +' L_2) +' L_3 = L_1 +' (L_2 +' L_3)$

$$\left[(L_1 +' L_2) +' L_3\right](v) = (L_1 +' L_2)(v) + L_3(v) = L_1(v) + L_2(v) + L_3(v)$$

$$\left(L_1 +' (L_2 +' L_3)\right)(v) = L_1(v) + (L_2 +' L_3)(v) = L_1(v) + L_2(v) + L_3(v)$$

2) COMMUTATIVA: $L_1 +' L_2 = L_2 +' L_1$

$(L_1 +' L_2)(v) = L_1(v) + L_2(v)$

$(L_2 +' L_1)(v) = L_2(v) + L_1(v)$

+ GODE DELLA PROPRIETÀ COMMUTATIVA PERCHÉ È UNA SOMMA ALL'INTERNO DELLO SPAZIO VETTORIALE W

3) ELEMENTO NEUTRO: $e \in Hom$

$L +' e = e +' L = L \quad \forall L \in Hom$

$(L +' e)(v) = L(v) \quad \forall v \in V$

$L(v) + e(v) = L(v) \quad \forall v \in V$

$e(v) = L(v) - L(v) = 0 \quad \forall v \in V$

$e : V \longrightarrow W$
$(x_1 \dots x_n) \longmapsto 0$

$e\ \exists$ ED È UGUALE ALL'APPLICAZIONE NULLA.

4) ELEMENTO OPPOSTO $(-L)$

$L +' (-L) = (-L) +' L = e = 0$

$\left(L +' (-L)\right)(v) = 0 \quad \forall v \in V$

$L(v) + (-L)(v) = 0 \quad \Rightarrow (-L)(v) = -(L(v))$

LA SOMMA $+'$ DEFINITA IN Hom, VERRÀ POI INDICATA SEMPLICEMENTE CON $+$

DEFINISCO ORA IL PRODOTTO IN $\mathcal{H}om(V,W)$

$L \in \mathcal{H}om \qquad L: V \longrightarrow W$

$\alpha \in \mathbb{R} \qquad \alpha L: V \longrightarrow W$

$\qquad v \longmapsto (\alpha \cdot L)(v) = \alpha(L(v))$

1) ASSOCIATIVA:

$(\alpha \cdot \beta) \cdot L = \alpha \cdot (\beta \cdot L)$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall L \in \mathcal{H}om(V,W) \Rightarrow ((\alpha \ \beta) \cdot L)(v) = (\alpha \ \beta)[L(v)]$

$\alpha \cdot (\beta \cdot L)(v) = \alpha(\beta(L(v)))$

$\Rightarrow$

$(\alpha \ \beta)(L(v)) = \alpha(\beta(L(v)))$ SONO UGUALI PERCHÉ $L(v)$ È UN ELEMENTO DI W E W È SPAZIO VETTOR.

$L(v) \in W \ \forall v \in V; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

2) ELEMENTO NEUTRO: $e = 1 \in \mathbb{R}$

$1 \cdot L = L \quad \forall L \in \mathcal{H}om(V,W)$

$(1 \cdot L)(v) = L(v) \ \forall v \in V$

$1 \ L(v) = L(v)$

3) DISTRIBUTIVA:

$\alpha \cdot (L_1 + L_2) = \alpha \cdot (L_1) + \alpha \cdot (L_2) \quad \forall L_1, L_2 \in \mathcal{H}om(V,W)$
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$[\alpha \cdot (L_1 + L_2)](v) =$

$= \alpha[(L_1 + L_2)(v)] = \alpha[L_1(v) + L_2(v)] = \alpha(L_1(v)) + \alpha(L_2(v)) =$

$(\alpha L_1(v)) + (\alpha L_2(v)) =$

$= (\alpha \cdot L_1)(v) + (\alpha \cdot L_2)(v)$

DOBBIAMO DIMOSTRARE ANCHE CHE:

SE L_1, L_2 SONO LINEARI $\Rightarrow L_1 + L_2$ È LINEARE

e SE $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot L_1$ È LINEARE :(ESERCIZIO)

$\mathcal{H}om(V, W)$ È UNO SPAZIO VETTORIALE.

$$\mathcal{H}om(V, W) \xrightarrow{F} \mathcal{M}_{\dim W \times \dim V}$$
$$L \longmapsto [L]^{B_W}_{B_V}$$

F esiste se fissiamo le basi B_V e B_W negli spazi vett. CON $B_V = \{v_1, \dots, v_k\}$ e $B_W = \{w_1, \dots, w_n\}$

F è lineare:
$$F(L_1 + L_2) = [L_1 + L_2]^{B_W}_{B_V} = [L_1]^{B_W}_{B_V} + [L_2]^{B_W}_{B_V} =$$
$$= F(L_1) + F(L_2)$$
$$F(\alpha \cdot L) = [\alpha \cdot L]^{B_W}_{B_V} = \alpha [L]^{B_W}_{B_V} = \alpha F(L)$$

ESEMPIO

EVIDENZIAMO SOLO LA PRIMA COLONNA DELLA MATRICE

$$[L_1 + L_2]^{B_W}_{B_V} = \begin{pmatrix} z_1 & \cdots \\ \vdots & \\ z_m & \end{pmatrix}$$
: $z_1, \dots, z_m$ sono tali che $\Rightarrow (L_1 + L_2)(v_1) = z_1 w_1 + \dots + z_m w_m$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + y_1 & \cdots \\ \vdots & \\ x_m + y_m & \end{pmatrix}$$

$L_1(v_1) + L_2(v_1) = x_1 w_1 + \dots + x_m w_m + (y_1 w_1 + \dots + y_m w_m) = (x_1 + y_1) w_1 + \dots + (x_m + y_m) w_m$

$$\hookrightarrow = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots \\ \vdots & \\ x_m & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 & \cdots \\ \vdots & \\ y_m & \end{pmatrix} = [L_1]^{B_W}_{B_V} + [L_2]^{B_W}_{B_V}$$

F DUNQUE

È UN'APPLICAZIONE LINEARE, È BIETTIVA POICHÉ SI DIMOSTRA CHE L'APPLICAZIONE $G : \mathcal{M}_{n \times k} \longrightarrow \mathcal{H}om(V, W)$ tale che $G(A) = A \cdot [v]_{B_V}$ È L'INVERSA DELLA F.

$$\left.\begin{array}{l} L \xmapsto[F]{} [L]^{B_W}_{B_V} \\ A[v]_{B_V} \xleftarrow[G]{} A \end{array}\right\}$$
SI VEDA CHE $F \circ G = id_{\mathcal{M}_{k \times n}}$ e $G \circ F = id_{\mathcal{H}om(V,W)}$

INFATTI, RICORDO CHE

F INVERTIBILE $\Longleftrightarrow \overbrace{F \circ G = G \circ F = id}^{\exists G \text{ TALE CHE}}$; e F è invertibile $\Leftrightarrow$ È BIETTIVA

F è un isomorfismo di spazi vettoriali CHE DIPENDE DALLE BASI SCELTE NEGLI SPAZI VETTORIALI

Applicazione lineare $T: V \longrightarrow V$ si dicono TENSORI o operatori lineari

Suppongo di avere la stessa base B_V sia nel dominio che nel codominio

$\Rightarrow$ a T è associata la matrice (QUADRATA) $[T]_{B_V}$, mentre se cambio base, B'_V, $\Rightarrow$ è associata la matrice $[T]_{B'_V}$.
Che legame c'è fra le due matrici?
Riscriviamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
(V, B_V) \arrow[r, "T"] & (V, B_V) \arrow[d, "id_V"] & \text{con matrice } [T]_{B_V} \\
(V, B'_V) \arrow[u, "id_V"] \arrow[r, "T"] & (V, B'_V) & \text{con matrice } [T]_{B'_V}
\end{tikzcd}$$

con matrice $[id]^{B_V}_{B'_V}$ (per $id_V : (V, B'_V) \to (V, B_V)$) $\qquad$ con matrice $[id]^{B'_V}_{B_V}$ (per $id_V : (V, B_V) \to (V, B'_V)$)

$$[T]_{B'_V} = [id]^{B'_V}_{B_V} \cdot [T]_{B_V} \cdot [id]^{B_V}_{B'_V}$$

$$\underbrace{[id]^{B_V}_{B'_V} \cdot [id]^{B'_V}_{B_V}}_{\text{Sono una l'inverso dell'altra}} \qquad \begin{tikzcd}
(V, B_V) \arrow[r, "id"] \arrow[rr, bend right, "id"'] & (V, B'_V) \arrow[r, "id"] & (V, B_V)
\end{tikzcd} = [I]$$

poiché $[id]^{B_V}_{B_V} = [I]$

~~Due matrici sono legate alla stessa applicazione lineare~~

Due matrici A e B sono associate allo stesso operatore $T: V \longrightarrow V$ in basi diverse di V se $\exists$ una matrice invertibile S tale che $B = S^{-1} A S$

Due matrici A, B tali che $\exists$ S invertibile con $B = S^{-1} A S$ si dicono SIMILI