LEZIONE DI GEOMETRIA 13/12/10

◦ SISTEMI LINEARI <u>NON</u> OMOGENEI DI n VARIABILI IN K EQUAZIONI

I SISTEMI LINEARI OMOGENEI HANNO SEMPRE ALMENO UNA SOLUZIONE (QUELLA NULLA), PER QUELLI <u>NON</u> OMOGENEI NON È SEMPRE VERO.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

CON $b_j \neq 0$ PER ALMENO UN $j \in \{1,\dots,k\}$ APPARTIENE ALL'INSIEME $\{1,\dots,k\}$

SCRIVO IL SISTEMA IN FORMA MATRICIALE:
SCRIVO LA MATRICE DEI COEFFICIENTI MOLTIPLICATA PER IL VETTORE COLONNA DELLE VARIABILI E L'UGUAGLIO AL VETTORE COLONNA DEI TERMINI NOTI:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}_{k\times n} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}_{k\times 1}$$

IL SISTEMA PUÒ ESSERE SCRITTO COME COMBINAZIONE LINEARE DELLE COLONNE CON COEFFICIENTI LE VARIABILI:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

QUANDO IL SISTEMA LINEARE NON OMOGENEO HA SOLUZIONE?

DEVO TROVARE UNA ENNUPLA DI ~~VARIABILI~~ SCALARI CHE RENDA OGNI EQUAZIONE UNA "IDENTITÀ" SOSTITUENDOLA ALLA ENNUPLA DELLE VARIABILI.

CIOÈ IL VETTORE DEI TERMINI NOTI ~~È~~ DEVE ESSERE COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI COLONNA DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI.

QUINDI SE RAGIONIAMO SULLA MATRICE COMPLETA:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array}\right)$$

(DATO CHE IL VETTORE $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$ É COMBINAZIONE LINEARE DELLE COLONNE) IL RANGO DELLA MATRICE COMPLETA DEV'ESSERE UGUALE A QUELLO DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI.

INOLTRE, SE, ~~[illegible]~~, SAPPIAMO CHE I RANGHI DELLA MATRICE COMPLETA E INCOMPLETA SONO UGUALI, VALE IL VICEVERSA, $\Rightarrow$ IL SISTEMA HA SOLUZIONE.

ABBIAMO DIMOSTRATO IL TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI IL CUI ENUNCIATO É: « UN SISTEMA LINEARE NON OMOGENEO HA SOLUZIONE, SE E SOLTANTO SE, IL RANGO DELLA MATRICE COMPLETA COINCIDE CON IL RANGO DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI ».

[VALE, OVVIAMENTE, ANCHE PER QUELLI OMOGENEI, PERCHÉ IN QUESTO CASO I RANGHI SONO SEMPRE UGUALI].

LE SUE SOLUZIONI SONO ∞^{n-r} (OCCUPANO UNO SPAZIO DI DIMENSIONE $n-r$)

CON $n = \#$ VARIABILI E $r = rg(A) = rg(A|B)$

LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI NON É UNO SPAZIO VETTORIALE, PERCHÉ L'ORIGINE É ESCLUSA. VEDIAMO LO "SPAZIO DELLE SOLUZIONI" DI UN SISTEMA LINEARE NON OMOGENEO (CHE VIENE DEFINITO SOTTOSPAZIO AFFINE):

ESEMPIO:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A} \quad \mid \quad B$$

VEDIAMO SE IL SISTEMA HA SOLUZIONE: CIOÈ SE $rg(A) = rg(A|B)$.

$rg(A) = 1$ E $rg(A|B) = 1 \Rightarrow$ C'É SOLUZIONE.

CALCOLIAMO LA SOLUZIONE:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ RIDUCENDO IL SISTEMA

RIMANE

UN'UNICA EQUAZIONE: É: $x_1 + x_2 = 3 \Rightarrow \Sigma$

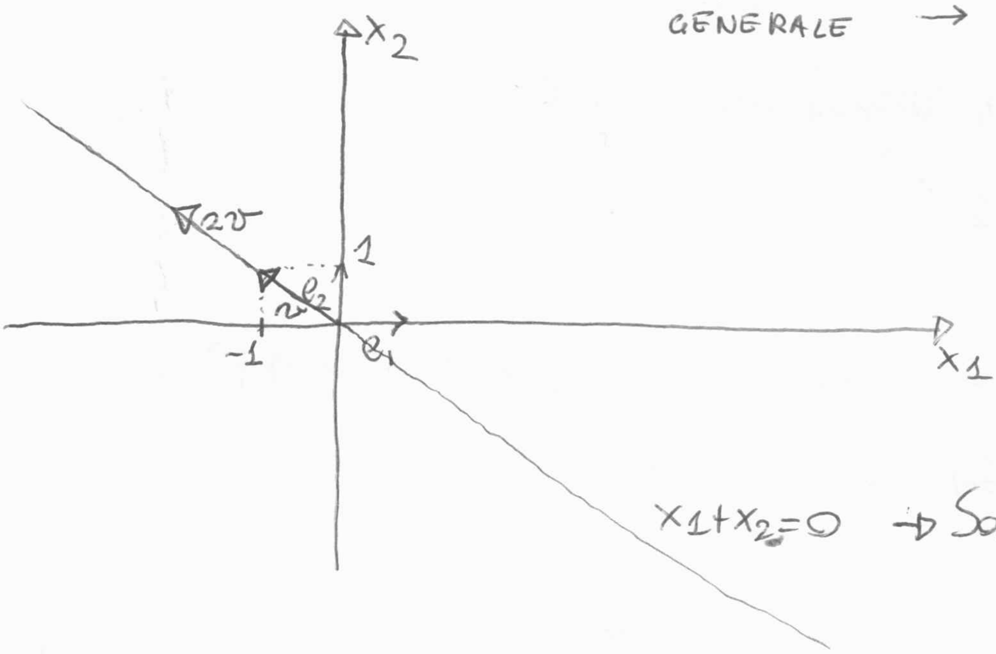
CONSIDERIAMO ORA IL SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO (Σ_0) $x_1 + x_2 = 0$ E NE

DETERMINO LE SOLUZIONI FONDAMENTALI: $x_1 = -x_2$

x_1	x_2
-1	1
$-a$	a

SOL FONDAMENTALE $= (-1, 1) = v$

SOLUZIONE GENERALE →

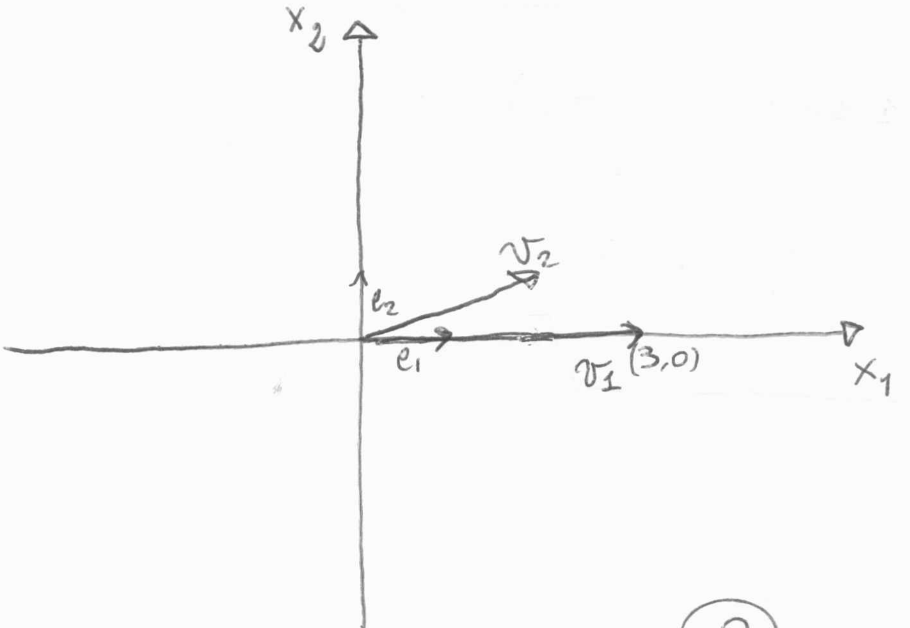


$x_1 + x_2 = 0 \to Sol(\Sigma_0)$

LA SOLUZIONE GENERALE DEL MIO SISTEMA Σ_0 É $\{a(-1, 1) \mid a \in \mathbb{R}\}$

CERCO UNA SOLUZIONE PARTICOLARE DI Σ: $x_1 = 3 - x_2$

x_1	x_2
3	0



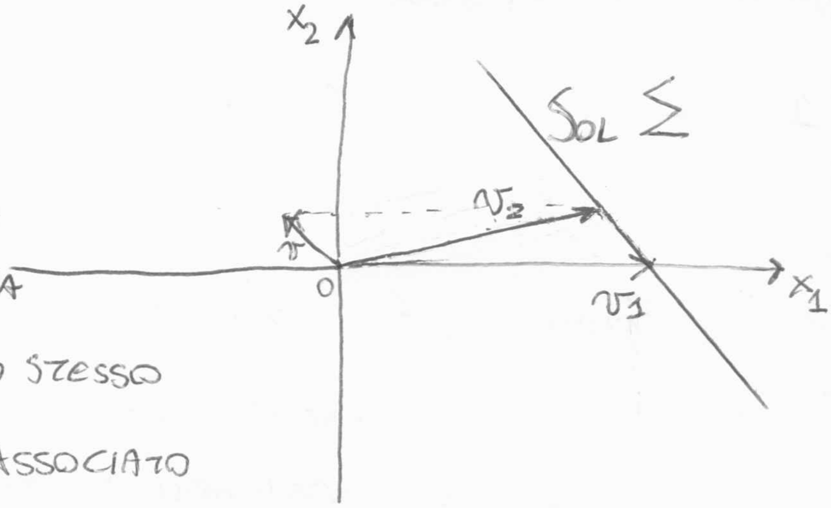
SOL. PARTICOLARE $=$

$v_1 = (3, 0)$

CON $x_2 = 1$, $x_1 = 2$

$v_2 = (2, 1)$ ALTRA SOL Σ

$(2,1) = (3,0) + 1(-1,1)$



LE SOLUZIONI DI UN SISTEMA LINEARE NON OMOGENEO SONO DATE DALLA SOMMA DI UNA SOLUZIONE PARTICOLARE DELLO STESSO CON UNA QUALUNQUE DEL SISTEMA ASSOCIATO OMOGENEO.

- IN $\mathbb{R}^3$: ESEMPIO

$x_1 + x_2 + x_3 = 3$; IL SISTEMA OMOGENEO $\Sigma_0 \{x_1+x_2+x_3=0$ AMMETTE INFINITE SOLUZIONI: $Sol(\Sigma_0)$ HA DIMENSIONE $2\,(\overset{3}{\overset{\shortparallel}{n}}\text{ VARIABILI} - \overset{1}{\overset{\shortparallel}{rg}} = 2)$ QUINDI È UN PIANO.

CERCO LE SOLUZIONI:

x_1	x_2	x_3
-1	1	0
-1	0	1
$-a-b$	a	b

SOL. FONDAMENTALI $= (-1,1,0), (-1,0,1)$

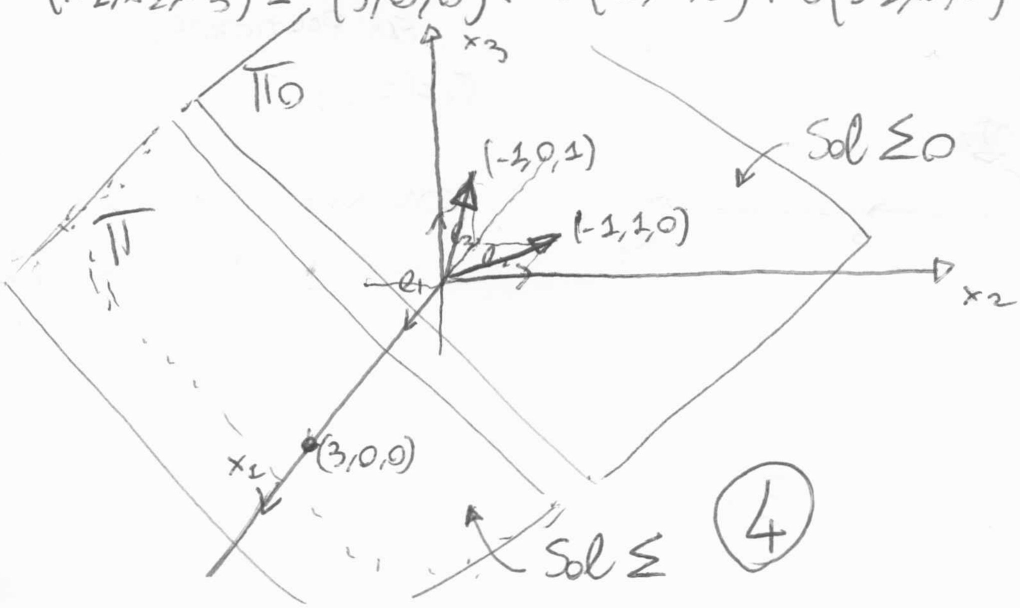
SOL. GENERALE $= a(-1,1,0) + b(-1,0,1) =$
$= (-a-b, a, b)$

CERCO 1 SOLUZIONE PARTICOLARE DI Σ:

$x_1 = 3 - x_2 - x_3$ CON $x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$

SOL PARTICOLARE: $(3,0,0)$

$(x_1, x_2, x_3) = (3,0,0) + a(-1,1,0) + b(-1,0,1)$



- UNA TRASLAZIONE DI VETTORE $a \in V$ É UNA APPLICAZIONE $T_a \; V \to V$, $v \mapsto a+v$

TALE CHE $T_a(v) = a+v$.

SE $W < V$, LA SUA IMMAGINE $T_a(W)$ SI DICE <u>TRASLATO</u> DI W TRAMITE IL VETTORE $a \in V$

DEFINIAMO I TRASLATI:

I TRASLATI DI SOTTOSPAZI VETTORIALI DI UNO SPAZIO V SI DICONO <u>SOTTOSPAZI AFFINI</u> DI V.

LA DIMENSIONE DEL SOTTOSPAZIO VETTORIALE SI ESTENDE AL SOTTOSPAZIO AFFINE TRASLATO $\boxed{\dim(T_a(W)) = \dim W}$