Teorema di struttura per gli operatori isometrici di uno spazio euclideo

Sia $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un operatore isometrico

$\Rightarrow \exists$ una base $\mathcal{B}$ ortonormale di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla quale la matrice associata a T ha la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & & & & \\ \vdots & 0 & \ddots & & & & & 0 & \\ \vdots & & & 1 & & & & & \\ & & & & -1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & 0 & & & & & & M_1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & M_l \end{pmatrix}$$

con $M_i = \begin{pmatrix} \cos \vartheta_i & -\operatorname{sen} \vartheta_i \\ \operatorname{sen} \vartheta_i & \cos \vartheta_i \end{pmatrix}$ $\quad i = 1, \dots, l$

Dimostrazione: per induzione su n = dimensione dello spazio

1) $n = 1$ $\quad T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$: gli unici operatori isometrici su $\mathbb{R}$ sono $T(x) = x$ (l'identità) e $T(x) = -x$ (simmetria rispetto all'origine) e le matrici associate in base canonica sono $A = (1)$ e $A = (-1)$

2) Supponiamo il teorema dimostrato per dimensione dello spazio ambiente $< n$ e dimostriamolo per dimensione n.

Consideriamo il polinomio caratteristico $p_T(\lambda)$ e una sua radice λ_0:

se $\lambda_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_0 = +1$ o $\lambda_0 = -1 \Rightarrow$ consideriamo un autovettore $v \in E_T(\lambda_0)$, che possiamo prendere di norma unitaria $\Rightarrow T(v) = \pm v \Rightarrow \mathcal{U} = \langle v \rangle$ è invariante per T e ha dimensione $1 \Rightarrow \mathcal{U}^\perp$ è invariante per T e ha dimensione $n-1 \Rightarrow \mathbb{R}^n = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp$ e posso considerare $T|_{\mathcal{U}^\perp} : \mathcal{U}^\perp \longrightarrow \mathcal{U}^\perp$: per tale operatore il teorema è dimostrato per ipotesi di induzione $\Rightarrow$ esiste in $\mathcal{U}^\perp$ una base ortonormale, $\mathcal{B}_1$, rispetto alla quale la matrice $[T|_{\mathcal{U}^\perp}]_{\mathcal{B}_1}$ ha la forma richiesta dal teorema

Ora prendiamo come base di $\mathbb{R}^n = \{v\} \cup \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$ è ortonormale e $[T]_{\mathcal{B}}$ ha dunque la forma:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & \\ & [T|_{\mathcal{U}^\perp}]_{\mathcal{B}_1} \end{pmatrix}$$

richiesta dal teorema.

Sia ora $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_0 = \alpha + i\beta$; dimostriamo che esiste un sottospazio invariante di dimensione 2.
considero il polinomio caratteristico $p_T(\lambda)$ e $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ una sua radice con $\beta \neq 0$; sia $A - \lambda_0 I$ con $A = [T]_e$
$\Rightarrow p_T(\lambda_0) = |A - \lambda_0 I| = 0 \Rightarrow$ Il sistema lineare omogeneo $(A - \lambda_0 I)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ha una soluzione non banale $Z = Z_x + i Z_y \in \mathbb{C}^n$

con $Z_x, Z_y \in \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ posto $[Z_x]_e = X$ e $[Z_y]_e = Y$

abbiamo $(A - \lambda_0 I)(X + iY) = 0$

$$A(X+iY) = \lambda_0 I (X+iY)$$

$$A(X+iY) = (\alpha + i\beta) I (X+iY) = (\alpha+i\beta)(X+iY)$$

$$AX + iAY = \alpha X - \beta Y + i(\beta X + \alpha Y)$$

$\Rightarrow$ devono essere uguagliate le parti reali e le parti immaginarie dei due numeri complessi

$$\Rightarrow \begin{cases} AX = \alpha X - \beta Y \\ AY = \beta X + \alpha Y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} T(Z_x) = \alpha Z_x - \beta Z_y \\ T(Z_y) = \beta Z_x + \alpha Z_y \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $V := \langle Z_x, Z_y \rangle$ = sottospazio generato dai vettori Z_x e Z_y è invariante per T, poiché $T(V) \subseteq V$

Dimostriamo che Z_x e Z_y sono linearmente indipendenti:

Per assurdo, supponiamo $Z_y = \lambda Z_x$ $\lambda \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$$\begin{array}{l} 1) \\ 2) \end{array} \begin{cases} T(Z_x) = \alpha Z_x - \beta \lambda Z_x = (\alpha - \beta\lambda) Z_x \\ T(Z_y) = T(\lambda Z_x) = \lambda T(Z_x) = \beta Z_x + \alpha(\lambda Z_x) = (\beta + \alpha\lambda) Z_x \end{cases}$$

moltiplichiamo 1) per λ $\Rightarrow$

$$\begin{array}{l} 1') \\ 2) \end{array} \begin{cases} \lambda T(Z_x) = (\lambda\alpha - \beta\lambda^2) Z_x \\ \lambda T(Z_x) = (\beta + \alpha\lambda) Z_x \end{cases} \Rightarrow \text{uguagliamo i secondi membri}$$

$$\Rightarrow (\lambda\alpha - \beta\lambda^2) Z_x = (\beta + \alpha\lambda) Z_x \Rightarrow$$

$$-\beta\lambda^2 Z_x = \beta Z_x \Rightarrow -(\beta\lambda^2 + \beta) Z_x = 0 \quad \text{ma } Z_x \neq 0$$

$\Rightarrow$ $\beta(\lambda^2 + 1) = 0$ ma $\beta \neq 0$ perché $\lambda_0 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ assurdo perché $\lambda \in \mathbb{R}$!

$\Rightarrow$ Z_x e Z_y sono linearmente indipendenti

$\Rightarrow$ $\dim V = \dim \langle Z_x, Z_y \rangle = 2$ e posso considerare

$\mathcal{B}_V = \{Z_x, Z_y\} \Rightarrow$ se $T_1 = T|_V$ abbiamo che

$$[T_1]_{\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = A_2$$

Inoltre sappiamo che $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, perché è la norma dell'autovalore $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, che essendo autovalore di un operatore isometrico, deve avere norma unitaria

$\Rightarrow$ T_1 è invertibile e $[T_1^{-1}]_{\mathcal{B}_V} = [T_1]_{\mathcal{B}_V}^{-1} =$

$$= A_2^{-1} = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow A_2^{-1} = A_2^T$$

$\Rightarrow$ A_2 è ortogonale

$T_1 = T|_V$ è un operatore isometrico su V $\Rightarrow$

$$\langle T_1(Z_x), Z_x \rangle = \langle Z_x, T_1^{-1}(Z_x) \rangle$$

$$\langle \alpha Z_x - \beta Z_y, Z_x \rangle = \langle Z_x, \alpha Z_x + \beta Z_y \rangle$$

$$\cancel{\alpha \langle Z_x, Z_x \rangle} - \beta \langle Z_y, Z_x \rangle = \cancel{\alpha \langle Z_x, Z_x \rangle} + \beta \langle Z_x, Z_y \rangle \Rightarrow \beta \langle Z_x, Z_y \rangle = 0$$

essendo $\beta \neq 0 \Rightarrow \langle Z_x, Z_y \rangle = 0 \Rightarrow$ Z_x e Z_y sono ortogonali

Si dimostra che $\|Z_x\|^2 = \|Z_y\|^2$:

$$\langle T_1(Z_x), Z_y \rangle = \langle Z_x, T_1^{-1}(Z_y) \rangle$$

$$\langle \alpha Z_x - \beta Z_y, Z_y \rangle = \langle Z_x, -\beta Z_x + \alpha Z_y \rangle$$

$$\cancel{\alpha \langle Z_x, Z_y \rangle} - \beta \langle Z_y, Z_y \rangle = \cancel{\alpha \langle Z_x, Z_y \rangle} - \beta \langle Z_x, Z_x \rangle \Rightarrow \cancel{\beta} \|Z_y\|^2 = \cancel{\beta} \|Z_x\|^2$$

$\Rightarrow$ posto $\|Z_x\| = \|Z_y\| = \mu \neq 0$, prendiamo come base $\mathcal{B}'_V$ dello spazio V, formata dai vettori ortonormali w_1 e w_2 con $w_1 = \dfrac{Z_x}{\mu}$ e $w_2 = \dfrac{Z_y}{\mu}$; avremo $[T_1]_{\mathcal{B}'_V} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

poiché $T_1(w_1) = \dfrac{1}{\mu} T(Z_x) = \alpha \dfrac{Z_x}{\mu} - \beta \dfrac{Z_y}{\mu} = \alpha w_1 - \beta w_2$

e $T_1(w_2) = \dfrac{1}{\mu} T(Z_y) = \beta \dfrac{Z_x}{\mu} + \alpha \dfrac{Z_y}{\mu} = \beta w_1 + \alpha w_2$

$$\Rightarrow [T_1]_{\mathcal{B}'_V} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Ora considero $V^\perp$, invariante per T, e per ipotesi di induzione, essendo $\dim V^\perp = n-2$, esiste una base ortonormale $\mathcal{B}_{V^\perp}$, rispetto alla quale la matrice $\left[T|_{V^\perp}\right]_{\mathcal{B}_{V^\perp}}$ ha la forma richiesta.

Ora considero in $\mathbb{R}^n$ la base $\mathcal{B}_{V^\perp} \cup \mathcal{B}'_V = \mathcal{B} \Rightarrow$ la matrice associata a T in tale base sarà:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \left[T|_{V^\perp}\right]_{\mathcal{B}_{V^\perp}} & \\ & \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

come volevasi dimostrare. ∎