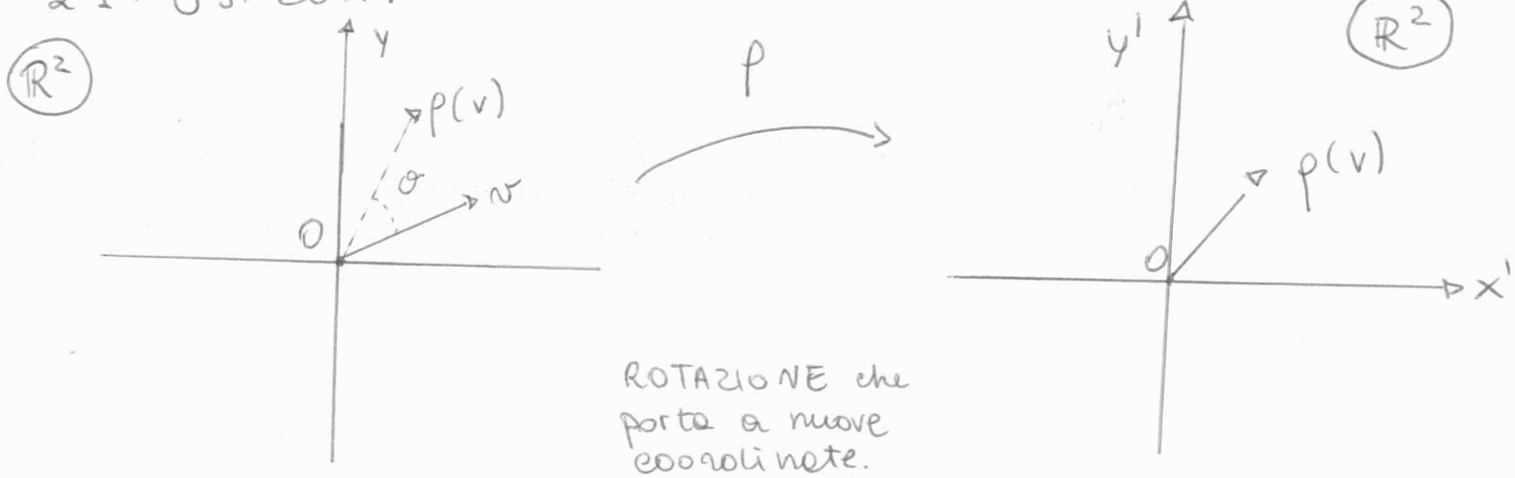
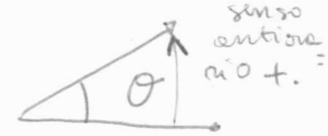
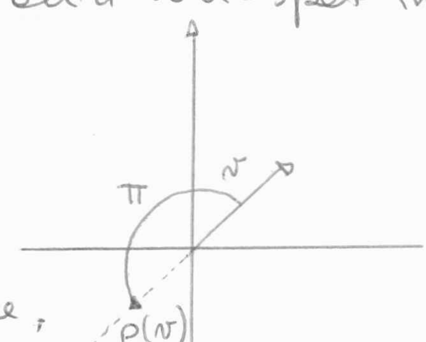
21. 03. 2011



ROTAZIONE che porta a nuove coordinate.
(la rotazione avviene attorno all'origine)

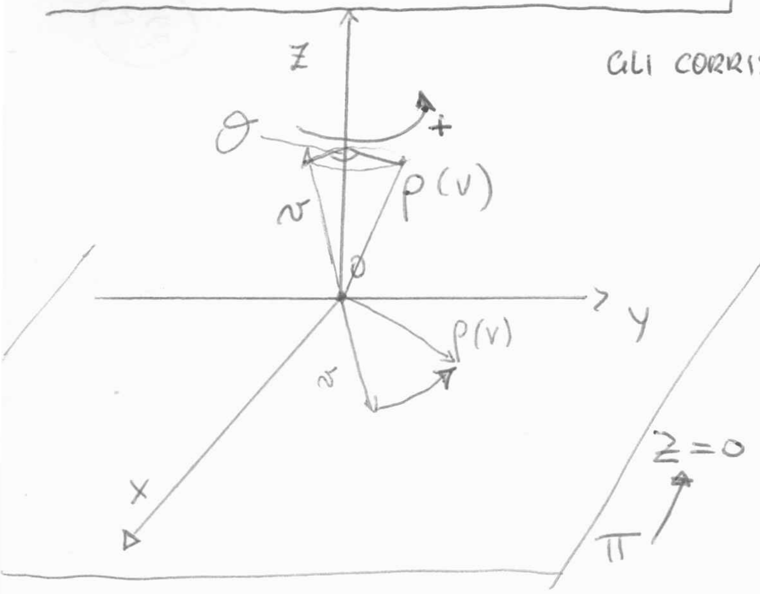


fissato un angolo θ, $0 < \theta < \pi$
(con $\theta = 0$, ~~[illegible]~~ $\rightarrow$ è l'identità)
È DATA LA ROTAZIONE
~~Rotazione~~ da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
Disegno un vettore v e lo ruoto ottenendo $\rho(v)$
(vedere figura)
Ci sono sottospazi invarianti diversi da quelli banali?
Quali sono i sottospazi invarianti? l'ORIGINE. (BANALE)
A dimensione 1 invece VANNO RICERCATI TRA ~~[illegible]~~ le rette per l'origine
Per essere invarianti le rette devono essere rimandate a se stesse DOPO LA ROTAZIONE, ~~quindi~~, per $0 < \theta < \pi$,
la rotazione nel piano non ha altri sottospazi invarianti diversi da quelli banali.



caso $\theta = \pi$
Esistono altri spazi inv?
Sì, LE RETTE ~~[illegible]~~ passanti per l'origine,
perché ruotando di π, ~~[illegible]~~
disegno l'opposto del vettore iniziale,
il quale rimane sempre nel suo
sottospazio. 1-DIMENSIONALE

ROTAZIONE IN $\mathbb{R}^3$ ATTORNO ALL'ASSE Z



Se ruoto v, il punto che GLI CORRISPONDE ruota nel piano $\perp$ all'asse di rotazione, IN CUI È CONTENUTO, e ottengo $\rho(v)$

Esistono sottospazi invarianti?

$\boxed{\text{dim } 0}$: ORIGINE

$\boxed{\text{dim } 1}$:

I vettori che stanno sull'asse z ($= \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$) vengono ruotati ma rimangono sempre sull'asse z (in questo caso) anche dopo la rotazione.

L'asse z è invariante. È l'unico sottospazio 1-dimensionale invariante; tutte le altre variano di θ con la rotazione

$\boxed{\text{dim } 2}$: il piano xy. ($\Rightarrow z=0$) I vettori su questo piano vengono ruotati, ma rimangono nello stesso piano. (si ricordi che si parla sempre di SOTTOSPAZI)

Nel caso $\theta = \pi$ è invariante, oltre il piano $z=0$, OGNI PIANO DEL FASCIO DI ASSE $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

$$\rho : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longrightarrow \rho(x,y)$$

DETERMINARE LA SUA ESPRESSIONE ANALITICA

con ρ rotazione di angolo θ, $0 < \theta < \pi$.

è molto evidente se espresso in coordinate polari.

Qual è la proprietà caratterizzante del sottospazio invariante di dim. 1? Dato $T: V \to V$, operatore, con $\dim V = n$, se il sottospazio invariante ha dimensione 1, allora tale sottospazio può essere caratterizzato nel seguente modo:

$$\{ v \in V \text{ per i quali } \exists \text{ uno scalare } \lambda \in \mathbb{R} \mid T(v) = \lambda v \}$$

[insieme dei vettori v appartenente al sottospazio vettoriale V per i quali esiste uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $T(v) = \lambda v$ (cioè sia un multiplo di λ)]

Il vettore v $(v \neq 0)$ si chiama AUTOVETTORE.

Definizione: un vettore v, DIVERSO DAL VETTORE NULLO, $(v \neq 0)$, per il quale esiste un $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $T(v) = \lambda v$ è detto AUTOVETTORE di T, e lo scalare λ è detto AUTOVALORE relativo all'autovettore v.

PROPRIETÀ

Esiste sempre un unico autovalore per ogni autovettore cioè ogni autovettore è definito da un unico autovalore.

Dim:
per ASSURDO (cioè supponendo che non sia vera)
supponiamo che esistano λ_1 e $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, con
$\lambda_1 \neq \lambda_2 \mid T(v) = \lambda_1 v$ e $T(v) = \lambda_2 v$.
Perciò $\lambda_1 v = \lambda_2 v$ che diventa $\lambda_1 v - \lambda_2 v = 0$
$\Rightarrow v(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$

Ma essendo $\boxed{v \neq 0}$!, l'unica possibilità è
che $\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$. Ma avevamo
supposto che $\lambda_1 \neq \lambda_2$. siamo arrivati all'assurdo, e abbiamo sbagliato il punto di partenza. Perciò l'autovalore è unico.

c.v.d.

Per ogni autovalore quanti autovettori saranno ad esso legato?
Dati $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in V \mid T(v) = \lambda v \Rightarrow$ se
considero $v' = \alpha v$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\Rightarrow T(v') = T(\alpha v) =$
$\alpha T(v) = \alpha \cdot (\lambda v) = \alpha \lambda v = \lambda \alpha v = \lambda(\alpha v) = \lambda v'$

pr. associativa del prodotto nello spazio vett

$\Rightarrow$

αv è ancora un autovettore con lo stesso autovalore λ.

Per uno stesso autovalore, esistono infiniti autovettori. In altre parole:

[Se $\exists$ un autovettore relativo ad un autovalore λ, allora esistono infiniti autovettori relativi a λ.]

Proposizione

L'insieme degli autovettori relativi allo stesso autovalore λ, uniti al vettore nullo, formano un sottospazio vettoriale di V. Tale sottospazio è detto <u>AUTOSPAZIO</u> relativo all'autovalore λ e all'operatore T e sarà indicato con E_λ.

DIMOSTRARE LA PROPOSIZIONE PER ESERCIZIO

Gli autospazi si intersecano solo nell'origine (SE $\lambda_1 \neq \lambda_2$):

$$E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\} \quad \forall \lambda_1 \neq \lambda_2$$

Proposizione

Autovettori relativi ad autovalori differenti sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione

(per induzione sul numero K degli autovettori)

un unico autovettore è sempre l. i, infatti:

$\boxed{K = 1}$ VERO, perché $v \neq 0$

Ora, supponiamo VERA l'affermazione per $\boxed{K}$ vettori e dimostriamo invece per $\boxed{K+1}$ vettori: $v_1, v_2, \dots, v_K, v_{K+1}$. Quindi poniamo

(*) $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_K v_K + a_{K+1} v_{K+1} = 0 \rightarrow$ vettore nullo.

DOBBIAMO dimostrare che tutti gli $a_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k+1$.

$\Rightarrow T(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_{K+1} v_{K+1}) = T(0)$

(ho applicato T ad entrambi i membri) Ma essendo T lineare, posso scrivere:

$a_1 T(v_1) + a_2 T(V_2) + \dots + a_k T(v_k) + a_{k+1} T(v_{k+1}) = 0$

per ogni autovettore esiste un autovalore, e ciò implica:

$$\boxed{a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 + \dots + a_k \lambda_k v_k + a_{k+1} \lambda_{k+1} V_{k+1} = 0 \quad (* *)}$$

Ora moltiplico $(*)$ per (λ_{k+1}):

$a_1 \lambda_{k+1} V_1 + a_2 \lambda_{k+1} V_2 + \dots + a_k \lambda_{k+1} V_k + a_{k+1} \lambda_{k+1} V_{k+1} = 0$

Questa equazione la chiamo con $(* * *)$

Sottraggo $(* *)$ da $(* * *)$ e ottengo:

$(\lambda_{k+1} - \lambda_1) a_1 v_1 + (\lambda_{k+1} - \lambda_2) a_2 V_2 + \dots + (\lambda_{k+1} - \lambda_k) a_k V_k = 0$

Con questo "trucco" ho diminuito i membri, riducendoli a k, per cui so già che la prop. iniziale risulta vera, PERCIÒ I COEFFICIENTI DI TALE COMBINAZIONE DEVONO ESSERE NULLI:

So che ogni $\lambda_i \neq \lambda_j$, perciò i membri tra parentesi sono $\neq 0$,

perciò $a_1, \dots, a_k$ saranno $= 0$.

In altre parole:

Poiché $V_1, \dots, V_k$ sono l. i. $\Rightarrow (\lambda_{k+1} - \lambda_j) a_j = 0$

$\forall j = 1, \dots, k$, ma $\lambda_{k+1} \neq \lambda_j \ \forall j = 1, \dots, k \Rightarrow$

$a_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k$.

Ritornando a $(*)$, e sostituendo tutto ciò ottengo:

$a_{k+1} V_{k+1} = 0$

ed essendo $V_{k+1} \neq 0$ per definizione $\Rightarrow a_{k+1} = 0$

c. v. d.

Un autovettore è definito così: È UN VETTORE $v \in V$ PER CUI $\exists\ \lambda \in \mathbb{R} \mid T(v) = \lambda v$.

partendo da questa definizione ricavo $\Rightarrow$

$$T(v) - \lambda v = 0$$

λv lo vedo come λ volte l'identità di V:

$$T(v) - \lambda\, id\, (v) = 0$$

ho la differenza di due immagini. So che si scrive, per definizione, :

$$(T - \lambda\, id)(v) = 0$$

qui ho la diff. di due applicazione lineari (T e λid) che è ancora un'applicazione lineare.

Sono alla ricerca del nucleo di tale applicazione. Cioè: cercare gli autovettori relativi all'autovalore λ, significa cercare i vettori di $\underline{\ker (T - \lambda id)}$, cioè $E_\lambda = \ker (T - \lambda\, id)$.

~~Possiamo~~ e il ker si trova con la matrice associata all'applicazione lineare. INFATTI:

$T - \lambda id$ si scriverà in maniera analitica; prenderò le componenti e le porrò uguali a zero.

Supponiamo che

$$\boxed{(T - \lambda\, id): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (\text{per avere una scrittura analitica di } T) \\ (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n)}$$

~~analiticamente~~

$$\Rightarrow \ker (T - \lambda\, id) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \;\middle|\; \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \right.$$

$\Rightarrow$ VOGLIAMO RISOLVERE TALE SISTEMA

(dove il sistema è omogeneo) e vogliamo soluzioni (PERCHÉ L'AUTOVETTORE, PER IPOTESI, È DATO $\neq 0$).
diverse da quella nulla ~~[illegible]~~) $\Longrightarrow$

Perciò impongo che il det della matrice associata al sistema sia $= 0$

In altre parole:

siccome vogliamo soluzioni non nulle, occorre che il rango del sistema NON sia massimo cioè che il determinante della matrice associata sia nullo.

Studiamo la matrice associata a $T - \lambda\, id$ nella base canonica. $\Longrightarrow$

$$[T - \lambda\, id]_e = [T]_e - [\lambda\, id]_e = [T]_e - \lambda [id]_e =$$

$$[T]_e - \lambda I .$$

$[T]_e - \lambda I$

e studio il det della matrice ~~[illegible]~~, che ha come parametro λ; ponendo det $= 0$ (polinomio caratteristico di T) ottengo i valori di λ che lo annullano.

In altre parole,

imponiamo al det $([T]_e - \lambda I) = 0$ e ne ricavo le radici dell'equazione: il determinante di $([T]_e - \lambda I)$ è un polinomio in λ di grado n, detto POLINOMIO CARATTERISTICO.

e le sue radici sono gli autovalori di T

chiamate ~~[illegible]~~ RADICI CARATTERISTICHE.

ESEMPIO

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longrightarrow (x+y, x)$$

$$\Rightarrow [T]_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow [T]_e - \lambda I =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \underbrace{-\lambda + \lambda^2 - 1}_{\text{polinomio in } \lambda \text{ di grado } 2} = \underbrace{0}_{\text{lo impongo}}$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

sono gli autovalori dell'appl. iniziale.

Trovare gli autospazi. PER ESERCIZIO.

$\boxed{\text{N.B.}}$ In alcuni testi risulta $\lambda I - [T]_e$, ma alla fine non cambia nulla, PERCHÉ DOBBIAMO IMPORRE AL DETERMINANTE DI ESSERE NULLO. NEL CASO $\lambda I - [T]_e$ il POLINOMIO CARATTERISTICO, PER OGNI GRADO n, HA COME COEFFICIENTE DEL TERMINE DI GRADO MASSIMO SEMPRE $+1$.