15-12-2010

PROPOSIZIONE

- Le soluzioni di un sistema lineare non omogeneo del tipo $AX=B$ sono date dalla somma di una soluzione particolare del SISTEMA $AX=B$ con una soluzione dell'omogeneo associato $(AX=0)$.

Prendiamo $AX=B$, sia $\underbrace{\hat{X}}_{\text{n-upla di scalari}}$ una sola soluzione particolare.

$\Rightarrow A\hat{X}=B$

$\Rightarrow AX=A\hat{X} \Rightarrow AX-A\hat{X}=0 \Rightarrow A(x-\hat{x})=0$

$\Rightarrow (x-\hat{x})$ è una soluzione dell'omogeneo associato $AX=0$

$\Rightarrow$ posto $(x-\hat{x})=X_0 \;/\; AX_0=0 \Rightarrow X=\hat{X}+X_0$

- $\boxed{\text{VICEVERSA}}$ Preso $X=\hat{X}+X_0 \Rightarrow$ dimostro che X è soluzione di $AX=B$

$AX=A(\hat{X}+X_0) \Rightarrow AX=\underbrace{A\hat{X}}_{\substack{\text{Sol di non omogeneo}\\ \parallel \\ B}}+\underbrace{AX_0}_{\substack{\text{Sol dell'omogeneo}\\ \parallel \\ 0}} \Rightarrow Ax=B+0=B$

c.v.d.

- $\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$ Dato uno spazio vettoriale V, un suo sottoinsieme $\mathcal{A}$, si dice SOTTOSPAZIO AFFINE se esistono un elemento $a\in\mathcal{A}$ e un sottospazio vettoriale $W<V \;/\; \mathcal{A}=a+W$, cioè se esiste una Traslazione $T_a: V\longrightarrow V \;/\; \mathcal{A}=T_a(W)$

In altre parole:...

Se $\exists\, a\in V$, $W<V$ e una Traslazione $T_a: V\rightarrow V$ TALE CHE

$$\mathcal{A} = T_a(W)$$

- **ESERCIZIO** DA FARE PER CASA

hp. dato $T_a : V \to V$
$v \mapsto a + v$

dim. T_a è biettiva (sia iniettiva che suriettiva)

□ Posto $\mathcal{A} = a + W$, si dimostra che $a \in \mathcal{A}$ non è univocamente determinato, cioè preso $b \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} = b + W$. DIMOSTRIAMO LA DOPPIA INCLUSIONE:

dim. (I) $\mathcal{A} \subseteq b + W$: prendiamo un elemento $c \in \mathcal{A}$, dimostriamo che $c \in b + W \Rightarrow$ essendo $\mathcal{A} = a + W$, $\Rightarrow \exists\, w_1 \in W \,/\, c = a + w_1$, inoltre $\exists\, w_2 \in W$ $/\, b = a + w_2$, POICHÉ ANCHE $b \in \mathcal{A} = a + W$

$\Rightarrow a = b - w_2$ e lo sostituisco in $c = a + w_1 \Rightarrow$

$c = b - w_2 + w_1 \Rightarrow -w_2 + w_1 = w_3 \in W$

$\Rightarrow c = b + w_3 \Rightarrow c \in b + W$

(II) Dimostro che $b + W \subseteq \mathcal{A}$, essendo $\mathcal{A} = a + W$.

Preso $d = b + w_1 \Rightarrow$ essendo $b = a + w_2 \Rightarrow d = a + w_2 + w_1$
$\Rightarrow d \in a + W = \mathcal{A}$

c.v.d.

CONCLUSIONE

Possiamo scegliere un qualunque elemento a di $\mathcal{A}$, e OGNI ALTRO ELEMENTO DI $\mathcal{A}$ è dato dalla somma di tale elemento a con un vettore di W (Spazio vettoriale di cui $\mathcal{A}$ è il traslato)

• Un sottospazio affine è un sottospazio vettoriale di V?

No, (a meno che ESSO contenga l'origine) : DARE UN CONTROESEMPIO!

POSSIAMO ASSERIRE DUNQUE CHE:

Un s.spazio vettoriale W, È ANCHE un sottospazio affine, (ESSENDO $W = 0+W$) ma non vale il viceversa..

INFATTI AD ESEMPIO: Dati: $a_1, a_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow a_1+a_2 \in \mathcal{A} = a+W$?

VEDIAMO:

$\Rightarrow a_1 = a+w_1$, $a_2 = a+w_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1+a_2 = a+w_1+a+w_2 = 2a + w_3 \neq a+w_4$

$\Rightarrow a_1+a_2 \notin \mathcal{A}$

INOLTRE:

• Se considerassi un prodotto $k\cdot a_1 = \underbrace{ka}_{\text{non si sa se } \in \mathcal{A}} + \underbrace{kw_1}_{\in W}$

DEFINIZIONE

• Se $\mathcal{A} = a+W \Rightarrow$ il sottospazio vettoriale W di cui $\mathcal{A}$ è il traslato, è <u>UNICO</u>!!

Tale UNICO SOTTOSPAZIO VETTORIALE W è detto <u>DIREZIONE</u> o <u>GIACITURA</u> del sottospazio affine $\mathcal{A}$

DEFINIZIONE

Due sottospazi affini si dicono PARALLELI (//) se la direzione del sottospazio affine di dimensione inferiore è contenuta nella direzione dell'altro sottospazio affine.

Se i due sottospazi affini hanno la stessa dimensione => essi sono // e hanno stessa direzione.

Dato $\mathcal{A} = a + W$ / $W < V$, un suo generico elemento X può essere scritto come una somma: $X = a + w$ con $w \in W$ => fissata una base di W, $B_W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ => un elemento X di $\mathcal{A}$; $x \in \mathcal{A}$, si scriverà:

$$X = a + w = a + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_k w_k$$

FISSATA UNA BASE NELLO SPAZIO VETTORIALE V, B_V, => POSSO scrivere tale equazione vettoriale mediante le coordinate dei vettori =>

Supposto $\dim V = n$, avrò:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} w_1^1 \\ w_1^2 \\ \vdots \\ w_1^n \end{pmatrix} + \dots + \lambda_k \begin{pmatrix} w_k^1 \\ w_k^2 \\ \vdots \\ w_k^n \end{pmatrix}$$

TALE EQUAZIONE VETTORIALE DÀ ORIGINE AD UN SISTEMA SCALARE UGUAGLIANDO LE COORDINATE OMONIME:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda_1 w_1^1 + \dots + \lambda_k w_k^1 \\ x_2 = a_2 + \lambda_1 w_1^2 + \dots + \lambda_k w_k^2 \\ \vdots \\ x_n = a_n + \lambda_1 w_1^n + \dots + \lambda_k w_k^n \end{cases}$$

EQUAZIONE PARAMETRICA DEL SOTTOSPAZIO AFFINE $\mathcal{A}$.

ESEMPIO

consideriamo in $\mathbb{R}^2$ un sotto spazio affine di dimensione 1: È UNA RETTA NEL PIANO, POICHÉ I SOTTOSPAZI VETTORIALI 1-DIMENSIONALI DI $\mathbb{R}^2$ SONO RETTE PER L'ORIGINE.
$\Rightarrow$ È lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo con $rg = 1$ E DUE VARIABILI x_1, x_2

cioè: $ax_1 + bx_2 + c = 0$ QUESTA È INFATTI l'eq. cartesiana di una retta nel piano; l'eq. della retta affine.

Passo dall'eq. cartesiana a quella PARAMETRICA, USANDO LA DEFINIZIONE DI SPAZIO AFFINE: $\mathcal{A} = a + W$
Spieghiamo con un esempio:
IN $\mathbb{R}^2$ CONSIDERIAMO:
$r: \; 2x_1 + x_2 - 1 = 0$

Prendiamo una soluzione particolare del non omogeneo (a)
$x_2 = -2x_1 + 1 \Rightarrow$ pongo $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1$
$\Rightarrow Q = (0, 1)$

Poi prendiamo la soluzione generale dell'omogeneo associato: $2x_1 + x_2 = 0$

$x_2 = -2x_1$
legate / indipendente

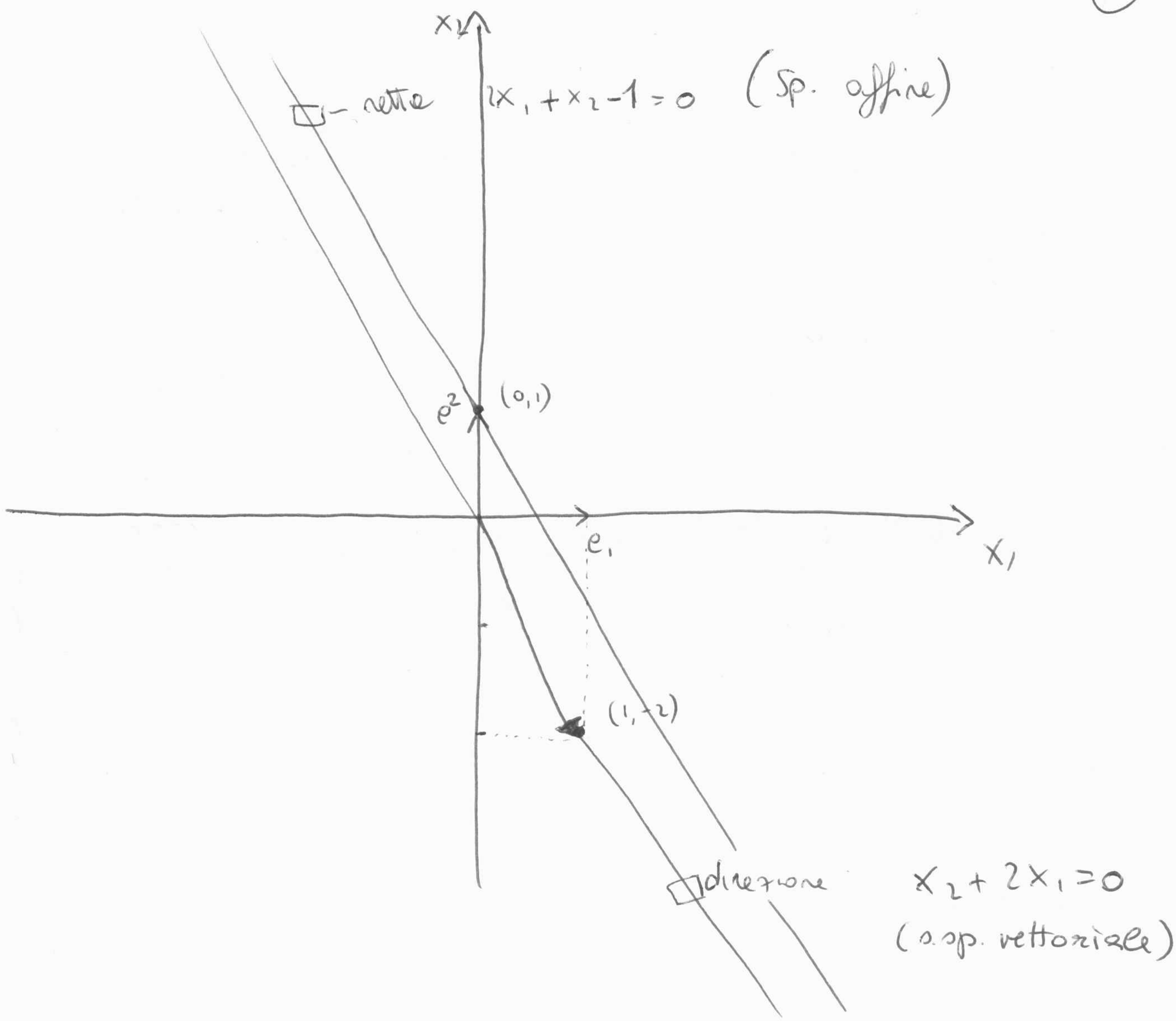
x_2	x_1
-2λ	λ

$\Rightarrow$ sol generale: $W = (\lambda, -2\lambda) = \lambda(1, -2)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

è l'eq. parametrica DELLA RETTA

IL SISTEMA SCALARE CHE NE DERIVA



VICEVERSA: COME SI PASSA DALL'EQUAZIONE PARAMETRICA ALLA CARTESIANA?

NEL SISTEMA CHE FORNISCE L'EQUAZIONE PARAMETRICA SI ELIMINA IL PARAMETRO, (O I PARAMETRI, IN GENERALE) LE EQUAZIONI CHE RIMANGONO FORNISCONO L'EQUAZIONE CARTESIANA DEL SOTTOSPAZIO AFFINE

ESEMPIO: CONSIDERO LA RETTA DELL'ESEMPIO PRECEDENTE

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \quad y = 1 - 2x$$

È L'EQUAZIONE CARTESIANA DELLA RETTA