30/05/11 GEOMETRIA (1)

Operatori isometrici nello spazio tridimensionale...

cioè $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

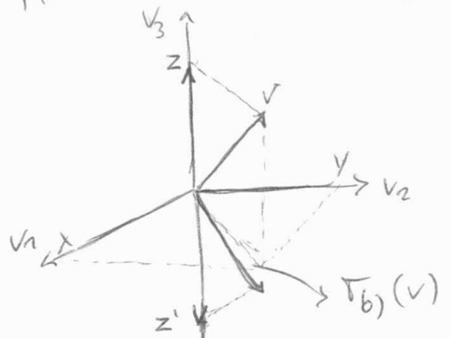
Il Teorema di struttura ci dice come possono essere classificate le matrici ortogonali associate a T in una base $\perp_n$ di $\mathbb{R}^3$, $B_{\perp n}$

$$: [T]_{B_{\perp n}} = \underset{\substack{\parallel \\ \text{id}}}{a)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}},\ b)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\ c)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\ d)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\ e)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix},\ f)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

non riusciamo ad avere 2 matrici di rotazioni assieme poiché dovremmo essere in $\mathbb{R}^4$

b) le colonne sono le immagini degli elementi di base espresse come comb. lineare della base del codominio. (che prendiamo uguale a quella del dominio)

Supponiamo che $B_{\perp n} = \{v_1, v_2, v_3\} \Rightarrow T_{b)}(v_1) = v_1$, $T_{b)}(v_2) = v_2$, $T_{b)}(v_3) = -v_3$



OGNI VETTORE DI $\mathbb{R}^3$ viene specchiato rispetto al piano $z=0$ (quando vi è uno specchiamento il det $= -1$)

(SPECCHIAMENTO o RIBALTAMENTO)

z' (specchiato) È L'IMMAGINE DI z TRAMITE T

c) è caso particolare di e) con $\theta = \pi$

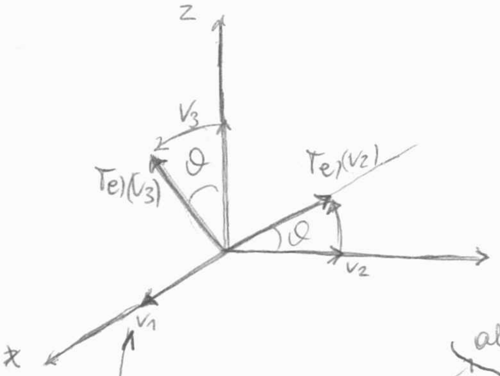
d) è caso particolare di f) con $\theta = \pi$

e) ~~a~~ insieme a c) non sono specchiamenti come quello trovato:

Rispetto a $B_{\perp m} = \{v_1, v_2, v_3\} \Rightarrow T_{e)}(v_1) = v_1$, $T_{e)}(v_2) = \cos\theta\, v_2 + \sin\theta\, v_3$

$T_{e)}(v_3) = -\sin\theta\, v_2 + \cos\theta\, v_3$

vettori che rimangono nel piano $v_2\, v_3$ (vengono ruotati di un angolo θ) in senso sinistrorso positivo



all'autovalore +1

AUTOSPAZIO relativo — ESSENDO $T_{e)}(v_1) = v_1$

ogni vettore dell'asse x viene rimandato in sé (questi vettori sono rimasti "al loro posto", non si muovono)

Rotazione pura (no altri tipi di isometrie) attorno all'asse $x=0$ $\Rightarrow$ l'immagine di ogni punto P di $\mathbb{R}^3$ rimane nel piano $\perp$ all'asse $x=0$, in cui si trova P.

(rotazioni in piani). L'asse $x=0$ è ASSE DI ROTAZIONE mentre gli infiniti piani sono detti PIANI DI ROTAZIONE (prendiamo sempre il più semplice ovvero il sottospazio vettoriale che ne è la giacitura.

I piani della rotazione sono infiniti, tutti $\perp$ all'asse di rotazione, determiniamo la loro GIACITURA. (il piano della rotazione)

Il det della matrice che ci dà questa rotazione è +1, non è diagonalizzabile.

DUNQUE:

Se la matrice $[T]_{B_{\perp m}}$ ha determinante +1 e non è diagonalizzabile (vedere per e) come esercizio) $\Rightarrow$ è la matrice di una rotazione pura di angolo θ con $0 < \theta < \pi$ poiché quando

$\boxed{\theta = 0} \Rightarrow$ identità (diagonalizz.)

$\boxed{\theta = \pi} \Rightarrow$ abbiamo il caso c) che ha det = +1 ma è diagonalizzabile

1) rappresenta la composizione tra un ribaltamento o specchiamento rispetto al piano $x=0$ e una rotazione di angolo θ in piano $\perp$ all'asse $x=0$

Sia T: un operatore associato (IN UNA BASE ORTONORMALE) ad una matrice 3x3 ortogonale
$\Rightarrow T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è operatore isometrico

ESEMPIO:

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} = A$$

vado a vedere se è una matrice ortogonale
$\to$ è ortogonale?
- andiamo a vedere se le colonne sono ortonormali oppure proviamo che $A \cdot A^T = I$;

, Vediamo se le colonne sono di norma unitaria

1) $\|C_1(A)\| = \sqrt{4/9 + 4/9 + 1/9} = 1 = \|C_2(A)\| = \|C_3(A)\|$

2) $C_1(A) \cdot C_2(A) = 4/9 - 2/9 - 2/9 = 0$; $C_1(A) \cdot C_3(A) = 0 = C_2(A) \cdot C_3(A)$

$\Rightarrow$ T è isometrico

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\to$ non è diagonalizzabile (COME VEDREMO POI) poiché non è simmetrica quindi T è data anche da una rotazione;

$|A| = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = +1 \Rightarrow$ ROTAZIONE PURA

ma che rotazione è? è in $\mathbb{R}^3$

Determiniamo allora l'asse, il piano, l'angolo, il verso della rotazione: i suoi elementi caratteristici.

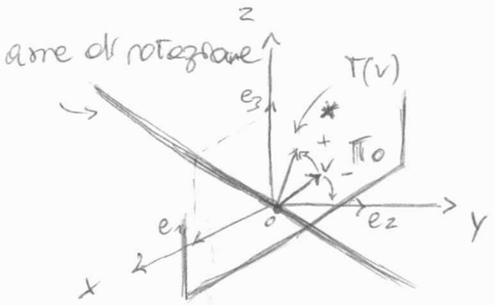
l'asse è l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = +1$

(Nel caso della composizione con uno specchiamento l'asse è l'autosp. relativo all'autovalore $\lambda = -1$)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3}-1 & 2/3 & 1/3 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}-1 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & \frac{2}{3}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dobbiamo trovare una retta $\leftarrow$ quindi $rg = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases} \quad \text{autospazio}$$



$$\begin{cases} y = 0 \\ z = x \end{cases} \quad \text{asse di rotazione: } \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle$$

Il piano di rotazione è il sottospazio ortogonale all'asse $\pi_0: x + z = 0$ (giacitura di tutti i piani). (sarà anche il PIANO DI SPECCHIAMENTO NEL CASO IN CUI L'OPERATORE ISOMETRICO SIA DATO ANCHE DA UNO SPECCHIAMENTO)

Troviamo l'angolo θ della rotazione: Ricordo che la traccia di una matrice quadrata è invariante per similitudine

($Tr A =$ somma degli elementi della diagonale principale)

$\Rightarrow$ sappiamo che esiste una Base $B_{\perp M}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che:

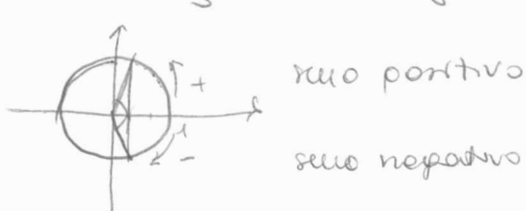
$$[T]_{B_{\perp M}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

A e $[T]_{B_{\perp M}}$ sono SIMILI $\Rightarrow Tr A = Tr([T]_{B_{\perp M}}) \Rightarrow 1 + 2\cos\theta = \frac{5}{3}$

$$\Rightarrow 2\cos\theta = \frac{5}{3} - 1$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \theta = \pm \arccos\frac{1}{3}$$

Ci sono due angoli compresi tra 0 e 2π che hanno lo stesso coseno: per stabilire qual è dei due, dobbiamo determinare il verso della rotazione



Devo determinare adesso il verso della rotazione (* in figura)

Determiniamo una terna di vettori $\{w_1, w_2, w_3\}$ formata da un vettore w_1 dell'asse di rotazione, un vettore w_2 del piano di rotazione e $w_3 = T(w_2)$ $\Rightarrow$ se la rotazione è avvenuta in verso antiorario (positivo) $\Rightarrow$ allora la terna $\{w_1, w_2, w_3\}$ sarà destrorsa, se in verso orario $(-)$ la terna è sinistrorsa.

Se la terna $\{w_1, w_2, w_3\}$ è destrorsa $\Rightarrow \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{vmatrix}$ = il determinante della matrice che ha per colonne le coord. dei vettori w_1, w_2, w_3 è positiva, se è sinistrorsa è negativo

$$\Rightarrow w_1, w_2, w_3 \Rightarrow w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = T(w_2) = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -4/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & -4/3 \\ 1 & -1 & -1/3 \end{vmatrix} = \frac{4}{3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{8}{3} < 0$$

terna sinistrorsa
(verso orario)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{2}{3}\sqrt{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$\operatorname{sen}\theta = -\sqrt{1 - 1/9} = -\frac{2}{3}\sqrt{2}$

matrice finale
(forma canonica della nostra matrice)

$$\left[v_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} ; \quad v_2 \in \Pi_0 \text{ con norma unitaria es } \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|} ; \quad v_3 \right]$$

RIMANE DA DETERMINARE $B_{\perp n}$ LA BASE ORTONORMALE RISPETTO ALLA QUALE LA MATRICE DELL'OPERATORE HA LA FORMA $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{2}{3}\sqrt{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

v_1: IL PRIMO VETTORE DI TALE BASE SARÀ UN VETTORE DELL'ASSE DI ROTAZIONE, NORMALIZZATO: AD ESEMPIO $v_1 = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}$

v_2 È UN VETTORE DEL PIANO DI ROTAZIONE, NORMALIZZATO $v_2 = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|}$

v_3 È UN VETTORE DEL PIANO DI ROTAZIONE, NORMALIZZATO E ORTOGONALE A v_2.

TALI VETTORI FORMANO ANCHE LE COLONNE DELLA MATRICE ORTOGONALE S TALE CHE $[T]_{B_{\perp n}} = S^{-1} [T]_e S$