30-03-11

- SE A É DIAGONALIZZABILE $\Rightarrow \exists\ S$ INVERTIBILE E UNA MATRICE DIAGONALE $D \mid D = S^{-1} \cdot A \cdot S$

SE LE MATRICI SONO DI GRADO n LA MATRICE S SI TROVERÁ RISOLVENDO UN SISTEMA DI n^2 EQUAZIONI. COME GIÁ ABBIAMO VISTO.

OPPURE: SE ABBIAMO $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow$ CONSIDERIAMO L'OPERATORE $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tale che, FISSATA UNA BASE B IN $\mathbb{R}^n$, SI ABBIA

$A = [T]_B$: T É COSÍ DEFINITO: PRESO $[v]_B \in \mathbb{R}^n$,

$$[v]_B = (x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow T((x_1, x_2, \dots, x_n)) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ALLORA $\overbrace{\exists\ B' \in \mathbb{R}^n}^{\text{SE A E' DIAGONALIZZABILE}} \mid [T]_{B'} = D$, OVVERO D É LA MATRICE ASSOCIATA A T MA IN BASE $\overbrace{\text{DIVERSA}}^{\text{EVENTUALMENTE}}$ DA B.

S SARÁ COSTITUITA IN MODO DA AVERE PER COLONNE I VETTORI DELLE COORDINATE DEGLI ELEMENTI DELLA BASE B' ESPRESSI IN B.

B' É COSTITUITA DA AUTOVETTORI, S AVRÁ PER COLONNE AUTOVETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI DELL'OPERATORE T.

- BISOGNA RISPETTARE L'ORDINE SCELTO PER GLI AUTOVALORI SULLA DIAGONALE DI D

ES:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow S = ?$$

$S \mid D = S^{-1} \cdot A \cdot S$

CERCO UNA BASE DI $\mathbb{R}^3$ FORMATA DA AUTOVETTORI RELATIVI ALL'OPERATORE

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid T(x) = AX \quad \text{CON} \quad A = [T]_e$$

PER PRIMA COSA CERCO GLI AUTOSPAZI: E_1, LO TROVO

RISOLVENDO $(A - I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad rg(A-I) = 1,$$ TENIAMO

PER SCRIVERE IL SISTEMA ASSOCIATO

SOLO UNA RIGA $\Rightarrow \Sigma: \{ x_1 + x_2 + x_3 = 0$ QUESTO É E_1

PER TROVARE LA BASE CERCO LE SOLUZIONI FONDAMENTALI:

x_1	x_2	x_3
-1	0	1
-1	1	0

$$B_{E_1} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

SARANNO I PRIMI 2 VETTORI COLONNA DI S.

TROVIAMO ORA

$$E_7 : (A - 7I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

IL RANGO È 2 $\Rightarrow$ LE RIGHE SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI A 2 A 2.

TENIAMO SOLO 2 RIGHE (LINEARMENTE INDIPENDENTI) E AVREMO IL SISTEMA

$$\Rightarrow \Sigma \begin{cases} -5x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$; E_7 È RETTA IN $\mathbb{R}^3$.

SEMPLIFICATA

TROVO UN VETTORE RISOLVENDO IL SISTEMA:

$$\begin{cases} -10x_2+5x_3+x_2+x_3=0 \\ x_1=2x_2-x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} -3x_2+2x_3=0 \\ x_1=2x_2-x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3=\frac{3}{2}x_2 \\ x_1=2x_2-\frac{3}{2}x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=\frac{3}{2}x_2 \\ x_1=\frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

ASSEGNO UN VALORE $\alpha \in \mathbb{R}$ AD x_2: AD ESEMPIO $\alpha = 2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_2=2 \\ x_1=1 \\ x_3=3 \end{cases} \Rightarrow B_{E_7}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$$

QUINDI $B_{\mathbb{R}^3}=\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$ e S SARÀ:

$S=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ È INVERTIBILE PERCHÉ I 3 VETTORI COLONNA SONO VETTORI DI BASE E QUINDI SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI.

2 ESEMPI SU APPLICAZIONI PRATICHE DI AUTOVALORI E AUTOVETTORI

1) SUONO DI UNA CORDA DI UNO STRUMENTO MUSICALE: LE FREQUENZE DEL SUONO SONO AUTOVALORI DI UN OPPORTUNO OPERATORE SIMMETRICO (IL QUALE DIPENDE DALLA LUNGHEZZA E TENSIONE DELLA CORDA...) MENTRE I CORRISPONDENTI AUTOVETTORI SONO LE ARMONICHE DELL'OSCILLAZIONE DELLE CORDE.

2) I LIVELLI ENERGETICI DEGLI e^- SONO ANCH'ESSI AUTOVALORI DI UN OPPORTUNO OPERATORE MENTRE LA FORMA DELLE CORRISPONDENTI FUNZIONI D'ONDA (ORBITALI) SONO DATE DAGLI AUTOSPAZI ASSOCIATI.

PRATICAMENTE QUASI TUTTE LE PRINCIPALI QUANTITÀ DELLA FISICA ATOMICA E SUBATOMICA SONO DESCRIVIBILI COME AUTOVETTORI: LA MECCANICA QUANTISTICA È STATA ANCHE CHIAMATA "<u>MECCANICA DELLE MATRICI</u>"

- POTENZA DI MATRICI

CERCARE LA POTENZA DI MATRICI, ANCHE PICCOLE, É COMPLICATO.

IL DISCORSO SI SEMPLIFICA SE LA MATRICE É DIAGONALIZZABILE:
SAPPIAMO CHE LA POTENZA DI UNA MATRICE DIAGONALE D È UNA MATRICE DIAGONALE CHE HA SULLA DIAGONALE LE POTENZE DEGLI ELEMENTI DELLA DIAGONALE DI D

ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^{1000} = \begin{pmatrix} a^{1000} & 0 \\ 0 & b^{1000} \end{pmatrix}$$

- DATA $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ CERCO A^{1000} SAPENDO CHE A É DIAGONALIZZABILE, CIOÉ $\exists\, D \mid D = S^{-1} \cdot A \cdot S \Rightarrow$

$$A = S \cdot D \cdot S^{-1} \Rightarrow A^{1000} = (SDS^{-1})^{1000} =$$

$$= \underbrace{(SDS^{-1})(SDS^{-1})(SDS^{-1})\dots(SDS^{-1})}_{1000 \text{ VOLTE}} =$$

ESSENDO IL PRODOTTO ASSOCIATIVO $\Rightarrow$

$$= SDS^{-1}SDS^{-1}S \dots S^{-1}SDS^{-1} \quad \text{MA } S^{-1}S = I$$

= ELEMENTO NEUTRO DELLA MOLTIPLICAZIONE TRA MATRICI

$$= S\overbrace{DDD\dots D}^{1000 \text{ VOLTE}}S^{-1} = SD^{1000}S^{-1}$$

MA AUTOSPAZIO E SOTTOSPAZIO INVARIANTE SONO EQUIVALENTI? (CONCETTI)

DATO $T: V \to V$ OPERATORE $E_\lambda = \{ v \in V \mid T(v) = \lambda v \} \cup \{0\}$

PER DEFINIZIONE OGNI λv APPARTENE A $\underline{E_\lambda < V}$,

$T(E_\lambda) \subseteq E_\lambda \Rightarrow$ <u>AUTOSPAZIO</u> <u>É</u> <u>SOTTOSPAZIO</u> <u>INVARIANTE</u> <u>PER</u> T

VICEVERSA

MA SOTTOSPAZIO INVARIANTE NON IMPLICA AUTOSPAZIO:
BISOGNA DARE UN CONTROESEMPIO. (FARE PER ESERCIZIO)

- DATO UNO SPAZIO VETTORIALE V DEFINITO SU UN CAMPO K SI DICE <u>FORMA</u> O <u>FUNZIONALE</u> UN'APPLICAZIONE $F: V \to K$

SIA V (SP. VETTORIALE) REALE $\Rightarrow$ DEFINIAMO UNA <u>FORMA</u> BILINEARE SU V COME UN'APPLICAZIONE $F: V \times V \to \mathbb{R}$ t.c. VERIFICA

1) $F((v_1+v_2, w)) = F((v_1, w)) + F((v_2, w))$ LINEARE SULLA PRIMA COMPONENTE

$F((v, w_1+w_2)) = F((v, w_1)) + F((v, w_2))$

2) $F((\alpha v, w)) = \alpha F((v, w))$

$F((v, \alpha w)) = \alpha F((v, w))$

$\forall\, v, w, v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$
$\alpha \in \mathbb{R}$

- UNA FORMA BILINEARE IN GENERALE NON É UN'APPLICAZIONE LINEARE. DARE UN ESEMPIO. (ESERCIZIO)

ES1:

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \to x+y$$

$$\left.\begin{aligned} F((x_1+x_2, y)) &= x_1+x_2+y \\ F((x_1,y)) + F((x_2,y)) &= x_1+y+x_2+y \end{aligned}\right\} \text{NON È BILINEARE!}$$

ES 2:

$$F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right) \to a\alpha + b\beta$$

$$F((v_1+v_2, w)) = F\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right)$$
$$= \alpha(a_1+a_2) + \beta(b_1+b_2)$$

$$F\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right) + F\left(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right) = \alpha a_1 + \beta b_1 + \alpha a_2 + \beta b_2 \quad \checkmark$$

~~BILINEARE~~

$$F\left(\lambda\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right) = \lambda a_1 \alpha + \lambda b_1 \beta$$

$$\checkmark$$

$$\lambda F\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right) = \lambda(a_1\alpha + b_1\beta)$$

F È FORMA BILINEARE!