29/11/2010

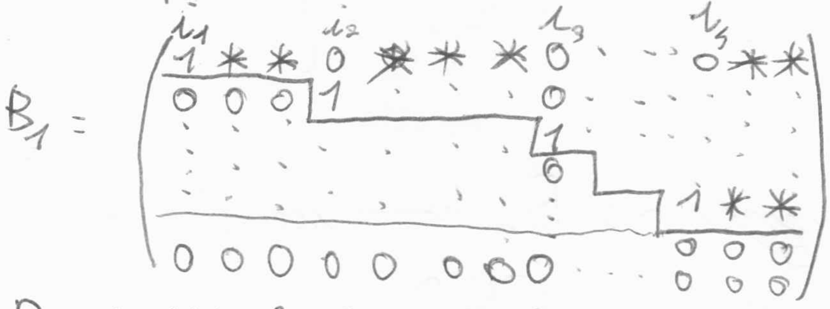
A partire da una matrice A la sua forma a gradini canonica deve essere unica.

Proposizione:

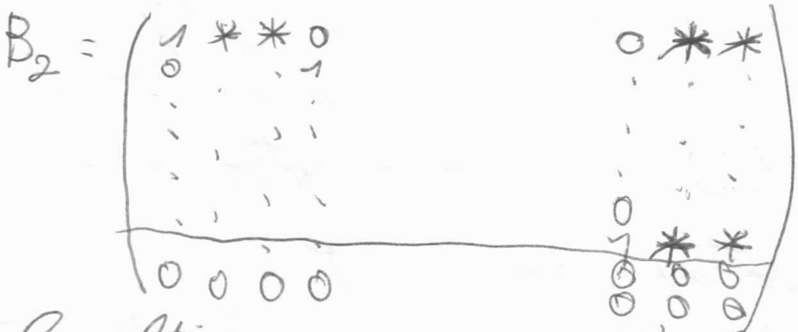
Data una matrice $A = \mathcal{M}_{K\times n}$ la sua forma a gradini canonica è unica

Dimostrazione

Siano B_1 e B_2 due forme a gradini canoniche della stessa matrice A.
Sappiamo che il rango di B_1 è uguale al rango di B_2 che deve essere uguale al rango di A ($rg B_1 = rg B_2 = rg A = r$) e che B_1 e B_2 presentano gli stessi vettori (COLONNA) canonici nelle stesse posizioni: $i_1, i_2, i_3, \dots, i_r$ ⇒ B_1 AVRÀ QUESTA FORMA:



B2 AVRÀ QUESTA FORMA:

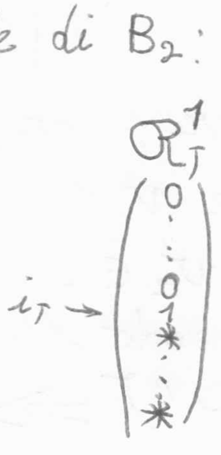


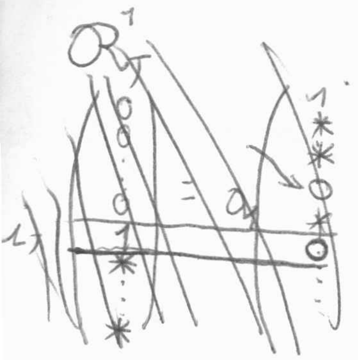
DOVE GLI ASTERISCHI "*" INDICANO ENTRATE DELLA MATRICE EVENTUALMENTE NON NULLE!

Le ultime K-r righe delle matrici B_1 e B_2 sono costituite da soli zeri.

R^1_T di B_1 è combinazione lineare delle righe di B_2:

$$R^1_T = a_1 R^2_1 + a_2 R^2_2 + a_3 R^2_3 + \dots + a_r R^2_r$$





$$R_J^1 \quad \begin{array}{r} \\ \\ \\ i_J \rightarrow \\ \\ i_{J+1} \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ *\\ 0\\ \vdots\\ x\end{pmatrix} = a_1 \begin{array}{r} \\ \\ i_2 \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix}1\\ *\\ *\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ *\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ *\\ *\end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ *\\ 0\\ \vdots\\ *\end{pmatrix} + \dots a_r \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ *\\ *\\ *\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}a_1\\ a_1 *\\ a_1 *\\ a_2\\ \vdots\\ a_3\\ \vdots\\ a_J\\ a_r\\ *\\ *\end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Per R_J^1 SI HA: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{J-1}, a_{J+1}, \dots a_r$ sono nulli mentre $a_J = 1$ PER L'UGUAGLIANZA SOPRASCRITTA $\Rightarrow$ poiché le due righe $R_J^1 = 1 \cdot R_J^2 \Rightarrow$ ESSE risultano identiche NELLE DUE MATRICI B^1 e B^2.

Lo stesso ragionamento si può fare con OGNI RIGA $R_1^1, R_2^1, R_3^1, \dots, R_r^1$

$$\Downarrow$$

Tutte le righe di B_1 sono uguali a quelle di B_2 CVD

Sia V uno spazio vettoriale n dimensionale e U e W sottospazi vettoriali di V con $\dim U = K$ e $\dim W = p$ considero $U \cap W$ e $U \cup W$: sono sottospazi di V

Dimostro che $U \cap W$ è sottospazio di V

1) $0 \in V$ è elemento di $U \cap W$ perché essendo $U \cap W = \{v = V \mid v = U \text{ e } v = W\}$ e $0 \in U$ e $0 \in W \Rightarrow \underline{0 \in U \cap W}$

2) presi $v_1, v_2 \in U \cap W \Rightarrow v_1 + v_2 \in U \cap W$

se $v_1 \in U \cap W \Rightarrow v_1 \in U$ e $v_1 \in W$ e se $v_2 \in U \cap W \Rightarrow v_2 \in U$ e $v_2 \in W$

essendo $U < V \Rightarrow v_1 + v_2 \in U$ e $v_1 + v_2 \in W$ poiché anche $W < V \Rightarrow \underline{v_1 + v_2 \in U \cap W}$

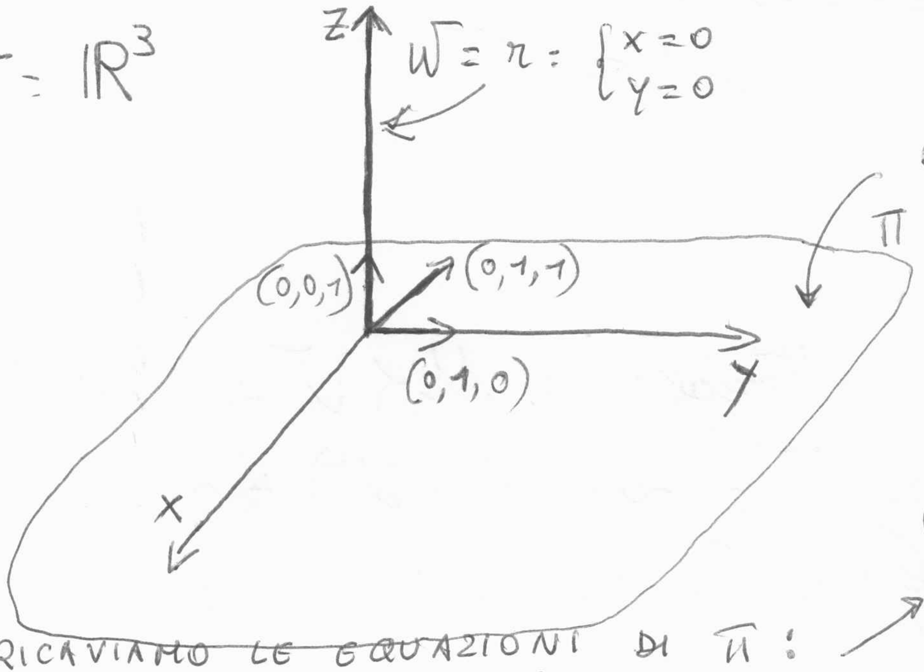
③ preso $v \in U \cap W$ e $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha v \in U \cap W$

$v \in U$ e $v \in W \Rightarrow \alpha v \in U$ e $\alpha v \in W \Rightarrow \underline{\alpha v \in U \cap W}$

CVD

Contro esempio del fatto che, in generale, $U \cup W$ non è sott. vettoriale di V

$V = \mathbb{R}^3$



AFFINCHÈ IL VETTORE $(x,y,z) \in \pi$ I VETTORI $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, (x,y,z) DEVONO ESSERE L. DIPENDENT
$\Rightarrow$ rg (MATRICE SISTEMA) $= 2$

RICAVIAMO LE EQUAZIONI DI π :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{(BASE DI } \pi \text{)} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = x \\ b = y \\ 0 = z \end{cases}$$

Perciò il piano xy può essere scritto con l'equazione $z = 0$

E L'EQUAZIONE DI r :

(BASE DI r)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{(asse } z\text{)}$$

la somma dei vettori $(0,0,1)$ e $(0,1,0)$ <u>non</u> appartiene a $U \cup W$ ESSENDO IL VETTORE $(0,1,1)$

DEFINIZIONE

$\mathcal{U} + \mathcal{W} = \{u + w \mid u \in \mathcal{U} \text{ e } w \in \mathcal{W}\}$ è detto spazio somma di $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ ed è il più piccolo sottospazio che contiene $\mathcal{U} \cup \mathcal{W}$

ESERCIZIO:

Dimostrare che $\mathcal{U} + \mathcal{W}$ è un sottospazio di V

Se $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{0\} \Rightarrow$ la somma di $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ si dice diretta e si indica $\mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$

Proposizione

Dati V spazio vettoriale e $\mathcal{U} < V$ e $\mathcal{W} < V \Longrightarrow \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{W} = \dim(\mathcal{U} + \mathcal{W}) + \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{W})$

Questa è la formula di Grassmann