lezione del 28/3/2011

Una matrice quadrata A è diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale, cioè se $\exists\ S \in M_{n\times n}$ invertibile / $D = S^{-1}AS$

Un operatore $T: V \to V$ sarà diagonalizzabile se una delle matrici AD ESSO ASSOCIATE sarà diagonalizzabile, cioè se $\exists\ B_V$ base di V / $[T]_{B_V}$ è diagonale $\iff$ la matrice associata a T in una base qualunque di V è diagonalizzabile

Proposizione

$T: V \to V$ è diagonalizzabile $\iff \exists$ base di V formata da autovettori.

Dimostrazione

"$\Rightarrow$"

T è diag $\Rightarrow \exists\ B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ / $[T]_{B_V}$ è diagonale $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\ v_j \in B_V$ cerco $T(v_j) = a_{1j} v_1 + a_{2j} v_2 + \dots + a_{nj} v_n$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ la j-esima colonna di $[T]_{B_V}$ è così formata: $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})^T$

$\Rightarrow$ nel nostro caso la j-esima colonna è: $(0, \dots, 0, a_{jj}, 0, \dots 0)$

$\Rightarrow T(v_j) = a_{jj} v_j \Rightarrow$ ciò significa che, v_j ($v_j \neq 0$ poiché elemento di una base) è autovettore per T, ciò è vero $\forall_j = 1, \dots, n$

<u>perciò "$\Rightarrow$" è dimostrata</u>

"$\Leftarrow$"

Prendiamo la base $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ formata da autovettori $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall_j = 1, \dots, n$ $T(v_j) = a_{jj} v_j$, a_{jj} autovalore, $\Rightarrow$ la j-esima colonna di $[T]_{B_V}$ è $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_{jj} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, perciò $[T]_{B_V}$ è diagonale.

poiché ~~ottoceno~~ una matrice diagonale
(LE COLONNE COSÌ DEFINITE FORMANO)

CVD

Proposizione

$T: V \to V$, operatore su V spazio vettoriale n-dimensionale,
$\Longrightarrow$ sono equivalenti le seguenti proprietà:

1) T è diagonalizzabile

2) $\sum_{j=1}^{K} \dim E_{\lambda_j} = n$, con E_{λ_j} autospazio relativo all'autovalore λ_j

3) le radici caratteristiche sono tutte nel campo su cui è definito lo spazio vettoriale e $\dim E_{\lambda_j} = \mu(\lambda_j)$ $\forall j = 1, \dots, K$
CIOÈ LA MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA E ALGEBRICA DI OGNI AUTOVALORE COINCIDONO.

Dimostrazione

dobbiamo dimostrare 1) $\Longleftrightarrow$ 2) e 2) $\Longleftrightarrow$ 3)
(oppure 1) $\Rightarrow$ 2), 2) $\Rightarrow$ 3), 3) $\Rightarrow$ 1))
~~usiamo il secondo metodo~~ usiamo il primo metodo

1) $\Rightarrow$ 2) SUPPONIAMO CHE $\exists$ K AUTOVALORI DIVERSI: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K$.

T è diagonaliz. $\Rightarrow \exists$ base $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ formata da autovettori; siano $v_1, \dots, v_p$ autovett. relativi all'autovalore λ_1, $v_{p+1}, \dots, v_q$ autovett. relativi all'autovalore λ_2 e così via fino a $v_{e+1}, \dots, v_n$ rel. all'autovalore $\lambda_K \Rightarrow$ indicheremo $\mathcal{U}_1$ il sottospazio di V generato da $v_1, \dots, v_p$, cioè $\mathcal{U}_1 = \langle\langle v_1, \dots, v_p \rangle\rangle$, $\mathcal{U}_2 = \langle\langle v_{p+1}, \dots, v_q \rangle\rangle$ e così via fino a $\mathcal{U}_K = \langle\langle v_{e+1}, \dots, v_n \rangle\rangle$

$$V = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \dots + \mathcal{U}_K$$

somma diretta

essendo ogni $\mathcal{U}_j \subseteq E_{\lambda_j}$, avrò $V = \mathcal{U}_1 + \dots + \mathcal{U}_K \subseteq E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_K} =$

$$\Rightarrow V = \bigoplus_{j=1}^{n} E_{\lambda_j} \Rightarrow \dim V = \dim \bigoplus_{j=1}^{\mu} E_{\lambda_j} = \sum_{j=1}^{K} \dim E_{\lambda_j} = n$$

Viceversa se $\sum_{j=1}^{K} \dim E_{\lambda_j} = n \Longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{n} E_{\lambda_j} = V =$

$\Rightarrow$ unendo le basi di ogni E_{λ_j}, ottengo una base di V, formato da autovettori $\Longrightarrow T$ è diagonalizzabile

Abbiamo, quindi, dimostrato 1) $\Longleftrightarrow$ 2)

2) $\Rightarrow$ 3)

Ipotesi $\sum_{j=1}^{K} \dim E_{\lambda_j} = n$ sappiamo che $\dim E_{\lambda_j} \leq \mu(\lambda_j)$ $\forall j = 1, \dots, K$

$\Rightarrow n = \sum_{j=1}^{K} \dim E_{\lambda_j} \leq \sum_{j=1}^{K} \mu(\lambda_j)$ QUINDI $n \leq \sum_{j=1}^{K} \mu(\lambda_j)$,

ma, essendo λ_j radici di un polinomio di grado n, la somma delle molteplicità di λ_n è MINORE o uguale a n

CIOÈ $\sum_{j=1}^{K} \mu(\lambda_j) \leq n \Rightarrow n \leq \sum_{j=1}^{K} \mu(\lambda_j) \leq n \Longrightarrow \sum_{j=1}^{K} \mu(\lambda_j) = n =$

$\Rightarrow$ Tutte le radici caratteristiche stanno nel campo in cui lavoriamo. Inoltre la $\dim E_{\lambda_j} = \mu(\lambda_j)$ $\forall j = 1, \dots, K$

2) $\Leftarrow$ 3)

$\sum_{j=1}^{K} \mu(\lambda_j) = n$ ed essendo ANCHE $\dim E_{\lambda_j} = \mu(\lambda_j)$ $\forall j = 1, \dots, K$ $=$

$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{K} \dim E_{\lambda_j} = n$

Abbiamo dimostrato 2) $\Longleftrightarrow$ 3)

CVD

Se il polinomio caratteristico è $(\lambda+1)(\lambda^2+2)$ e il campo su cui operiamo è $\mathbb{R} \Longrightarrow$ la matrice associata non è diagonalizzabile.
Abbiamo infatti ~~un~~ unica radice reale $\lambda=-1$ con $\mu(-1)=1$ perciò non tutte le radici sono nel campo $\mathbb{R}$
Invece, in $\mathbb{C}$ si scompone in $(\lambda+1)(\lambda-i\sqrt{2})(\lambda+i\sqrt{2})$ con $\mu(-1)=1$, $\mu(i\sqrt{2})=1$ e $\mu(-i\sqrt{2})=1$ ed è perciò diagonaliz.

Esempio

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\3&3&4\end{pmatrix}$$ A è diagonalizzabile?

Calcoliamo $|A-\lambda I|$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\3&3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-\lambda&1&1\\2&3-\lambda&2\\3&3&4-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\2&3-\lambda&2\\3&3&4-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\left[(3-\lambda)(4-\lambda)-6\right]-\left[2(4-\lambda)-6\right]+\left[6-3(3-\lambda)\right]=$$

$$=(2-\lambda)(12-3\lambda-4\lambda+\lambda^2-6)-(8-2\lambda-6)+(6-9+3\lambda)=$$

$$=12-14\lambda+2\lambda^2-6\lambda+7\lambda^2-\lambda^3-2+2\lambda-3+3\lambda=$$

$$=-\lambda^3+9\lambda^2-15\lambda+7=(\lambda-1)(-\lambda^2+8\lambda-7)$$

$$-\lambda^2+8\lambda-7 \qquad \lambda=4\pm3 \begin{cases}1\\7\end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$-(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-7)$$

Abbiamo 2 autovalori reali $\lambda=1$ con $\mu(1)=2$ e $\lambda=7$ con $\mu(7)=1$
Ora vediamo l'autospazio E_1

$$(A-1\cdot I)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow \dim E_1=\dim\mathbb{R}^3-rg(A-I)$$

$$3-1=2$$

$$\dim E_1=\mu(1)$$

Poiché $\dim E_1 = \mu(1)$ e $\dim E_7 = \mu(7)$
la matrice è diagonalizzabile e la matrice diagonale cui è simile è $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

dove D è unica ~~a meno~~ meno dell'ordine degli elementi SULLA DIAGONALE

DEFINIZIONE: CHIAMIAMO SPETTRO DI A (O EQUIVALENTEMENTE SPETTRO DI T) L'INSIEME DEGLI AUTOVALORI, RIPETUTI TANTE VOLTE QUANT'È LA LORO MOLTEPLICITÀ.

Si elencano le radici scrivendole tante volte quant'è la loro molteplicità:

SPETTRO DI A = $Sp(A) = \{1, 1, 7\}$

così si danno tutte le informazioni in un'unica scrittura.

Il legame tra A e D è questo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot S$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{S}_{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

abbiamo quindi un'equazione matriciale che, una volta risolta, ci darà tutti gli elementi di S e quindi S stessa.

Per trovare S si può usare anche un metodo geometrico.