27-10-2010

Consideriamo un sistema lineare omogeneo:

$$\Sigma \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

FORMA MATRICIALE

$$A\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{VETTORE COLONNA}}$$

IL DETERMINANTE È NULLO

E TUTTI I MINORI DI ORDINE 2 SONO NULLI

siamo interessati a conoscere il rango del sistema $\Rightarrow rg\,\Sigma = rg\,A = 1$

FORMA CANONICA (A GRADINI): In ogni ~~riga~~ (COLONNA CHE CONTIENE IL PIVOT) abbiamo solo il pivot corrispondente ~~ed il termine noto~~ MENTRE LE ALTRE ENTRATE SONO NULLE

FORMA A GRADINI: $\underset{R_3 = R_1 + R_3}{\overset{R_2 = 2R_1 + R_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

dimensione $Sol\,\Sigma$ = #tot. variabili $- rg\,\Sigma$ $= 3 - 1 = 2$

$|x + y + z = 0| \longrightarrow$ è un piano

SCELGO LA "x" COME VARIABILE LEGATA

$x = -y - z$

Determino le soluzioni fondamentali

x	y	z
-1	1	0
-1	0	1

SOLUZIONI FONDAMENTALI $\rightarrow$ $V_1 = (-1;1;0)$, $V_2 = (-1;0;1)$

IN CORRISPONDENZA DEI VALORI SCELTI DI "y" E "z" DETERMINO I VALORI DI "x"

Soluzione generale

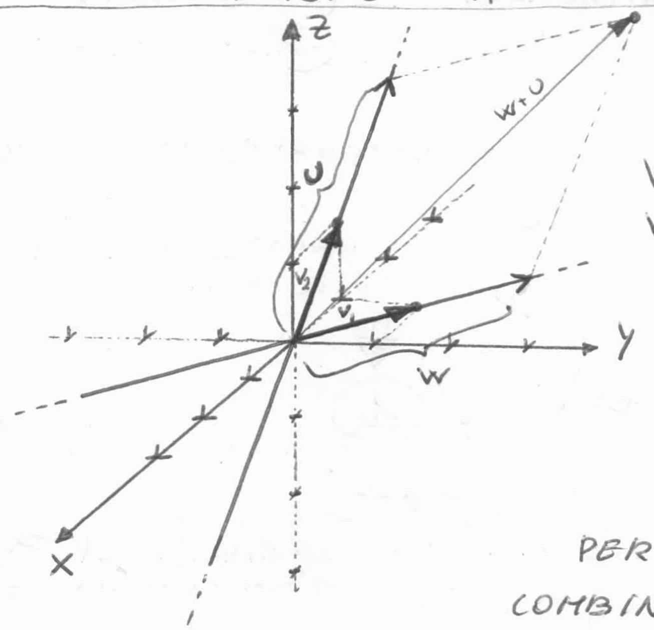
x	y	z
-a-b	a	b

$V = (-a-b;\ a;\ b)$ è soluzione generale di Σ

$$V = (-a-b;\ a;\ b) = a\overbrace{(-1;1;0)}^{V_1} + b\overbrace{(-1;0;1)}^{V_2} = $$
$$= (-a;a;0) + (-b;0;b)$$

LA SOLUZIONE GENERALE È COMBINAZIONE LINEARE DELLE SOLUZIONI FONDAMENTALI

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DI $\boxed{x+y+z=0}$



$v_1(-1;1;0)$
$v_2(-1;0;1)$

$$\underbrace{w+u = a v_1 + b v_2}_{\text{piano}}$$

PERCHÈ È L'INSIEME DELLE COMBINAZIONI LINEARI DI DUE SOLUZIONI FONDAMENTALI v_1 e v_2

Se $W = sol\Sigma$ $\quad$ Σ sistema lineare omogeneo

spazio delle soluzioni

> NB: $\underbrace{\text{spazio}}_{\downarrow}$ $\neq$ insieme
> ALGEBRICAMENTE PIÙ RICCO

$Sol\Sigma$ vive in uno spazio in cui sono definite due operazioni: la somma e la moltiplicazione per uno scalare

DEFINIZIONE

SPAZIO VETTORIALE: insieme di oggetti dotato di due operazioni: la somma e la moltiplicazione per gli elementi di un campo, cioè per uno scalare

$\oplus : \underbrace{V \times V \longrightarrow V}$ $\qquad (v_1; v_2) \longrightarrow v_1 + v_2$

SOMMA $\quad$ OPERAZIONE BINARIA INTERNA

$\cdot : K \times V \longrightarrow V$ $\qquad (a; v_1) \longrightarrow a \cdot v_1$

MOLTIPLICAZIONE

$k \in \mathbb{R}$

Le operazioni nello spazio vettoriale godono delle proprietà:

- LA SOMMA DEVE ESSERE
  - Associativa: $v_1+(v_2+v_3)=(v_1+v_2)+v_3 \quad \forall v_1; v_2; v_3 \in V$
  - $\exists$ elemento neutro e: $v+e=e+v=v \quad \forall v \in V \Rightarrow e=0$
  - $\forall v \in V \ \exists$ opposto $w \mid v+w=w+v=0 \Rightarrow w=-v$
  - commutativa: $v_1+v_2=v_2+v_1 \quad \forall v_1; v_2 \in V$

- LA MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE DEVE ESSERE
  - Associativa: $(ab)v=a(bv) \quad \forall a;b \in K \ ; \ v \in V$
  - $\exists$ elemento neutro: $1\cdot v=v\cdot 1=v \quad \forall v \in V$
  - distributiva: $a(v_1+v_2)=av_1+av_2 \quad \forall a \in K \text{ e } \forall v_1;v_2 \in V$

ESEMPIO

$\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale su se stesso (TUTTE LE PROPRIETÀ SONO SODDISFATTE)

VERIFICARLO!!

N.B. La moltiplicazione per uno scalare è la moltiplicazione tra numeri reali

$$\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x;y) \quad x;y\in\mathbb{R}\}$$

$$\cdot' \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$[\alpha,(x,y)] \longrightarrow \alpha\cdot'(x;y)=(\alpha x;\alpha y)$$

$$+' \quad \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

(ERRE DUE CARTESIANO ERRE DUE)

$$[(x_1;y_1);(x_2;y_2)] \longrightarrow [(x_1;y_1)+'(x_2;y_2)]=$$
$$=(x_1+x_2;y_1+y_2)$$

NB: ① APICE: INDICA CHE L'OPERAZIONE DI SOMMA O MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE È UN'OPERAZIONE NUOVA TRA COPPIE, NON UNA NORMALE SOMMA O PRODOTTO TRA NUMERI

VERIFICHIAMO LA PROPRIETÀ ASSOCIATIVA:

$$(x_1;y_1)+[(x_2;y_2)+(x_3;y_3)]=[(x_1;y_1)+(x_2;y_2)]+(x_3;y_3)$$

$$\forall (x_1;y_1);(x_2;y_2);(x_3;y_3)\in\mathbb{R}^2$$

prendendo come ipotesi: che in $\mathbb{R}$ valgano tutte le proprietà prima descritte

$$(x_1;y_1)+(x_2+x_3;y_2+y_3) \qquad (x_1+x_2;y_1+y_2)+(x_3;y_3)$$

$$[x_1+(x_2+x_3);y_1+(y_2+y_3)] \overset{?}{=} [(x_1+x_2)+x_3;(y_1+y_2)+y_3]$$

sì perché l'addizione è associativa in $\mathbb{R}$

→ FINIRE LA VERIFICA DELLE PROPRIETÀ.

ESEMPI DI SPAZI VETTORIALI:

1) Consideriamo l'insieme delle matrici 3x2 con entrate reali:

$\underbrace{\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})}$ È UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{R}$ CON LE OPERAZIONI VISTE DI SOMMA TRA MATRICI E MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE

INFATTI: VERIFICA DELLE PROPRIETÀ....

$$A+(B+C)=(A+B)+C \quad \forall A;B;C\in\mathcal{M}_{3\times 2}$$

etc.....

IN GENERALE:

$\mathcal{M}_{K\times N}(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

2) $C^0[a;b] = \{f : [a;b] \to \mathbb{R} \text{ continua}\}$ FUNZIONI CONTINUE

SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{R}$

DEFINIAMO LE OPERAZIONI:

SOMMA DI FUNZIONI $\longmapsto$ $f_1 [a;b] \to \mathbb{R}$; $f_2 [a;b] \to \mathbb{R}$

$x \to f_1(x)$ $\qquad$ $x \to f_2(x)$

$f_1 + f_2 : [a;b] \to \mathbb{R}$ È COSÌ DEFINITA:

$$x \to (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

PRODOTTO PER UNO SCALARE $\longmapsto$ $\alpha f : [a;b] \to \mathbb{R}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

$$x \to (\alpha f)(x) = \alpha (f(x))$$

VERIFICARE CHE CON TALI OPERAZIONI $C^0[a;b]$ È SPAZIO VETTORIALE

3) L'insieme dei polinomi su $\mathbb{R}$:

$\mathbb{R}[x] = \{$polinomi in una variabile a coefficienti reali$\}$

$\mathbb{R}_3[x] = \{$polinomi di terzo grado in una variabile a coeff. reali$\}$

DEFINIAMO LE OPERAZIONI:

SOMMA

$$p_1(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$p_2(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$
$$\to p_1(x) + p_2(x)$$

$$p_1(x) + p_2(x) = (a_3 + b_3)x^3 + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

MOLTIPL. × SCALARE

$$\alpha p(x) = \alpha [a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0]$$

$$\alpha p(x) = \alpha a_3x^3 + \alpha a_2x^2 + \alpha a_1x + \alpha a_0$$

VERIFICARE CHE $\mathbb{R}_3[x]$ È SPAZIO VETTORIALE