Lunedì 25/10

- Consideriamo un sistema lineare omogeneo, per esempio:

$$\begin{cases} 3x+2y-z=0 \\ x-y+z=0 \\ y-2z=0 \end{cases}$$

Se sostituissimo alle incognite lo 0, otterremmo sempre delle identità $0=0$.
Infatti ogni sistema lineare omogeneo ha sempre almeno la soluzione nulla σ, come si suol dire, quella banale.
Risolviamo il sistema con il metodo di eliminazione di Gauss:

associo la matrice dei coefficienti (i termini noti sono nulli)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{R_2'=3R_2-R_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{} $$

$$\xrightarrow[\sim]{R_3'=R_2'+5R_3} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Questa matrice presenta tre Pivots, quindi il Rango è rg=3. Sappiamo quindi le dimensioni dello spazio delle soluzioni del sistema.
$\dim \mathrm{Sol}\,\Sigma = \#\text{variabili} - rg\,\Sigma = 3-3=0$
- cioè un punto.
L'unica soluzione del sistema è la soluzione nulla: $\mathrm{Sol}\,\Sigma = \{(0,0,0)\}$

Vediamo un altro metodo per trovare il rango di una matrice, usiamo il determinante.
Data una matrice $A_{k\times n}$ si dice rango di A (rgA), l'ordine massimo dei $\boxed{\text{minori}}$ non nulli della matrice.
↓
determinanti delle sottomatrici quadrate di qualsiasi matrice A.

Nel nostro esempio, essendo la matrice già quadrata, il suo determinante è già un minore di ordine 3. Togliendo ulteriori righe/colonne per formare sottomatrici quadrate troviamo, via via, i minori di ordine 2 e di ordine 1.
La matrice nulla ha TUTTI i minori (= determinanti di sottomatrici), ~~è~~ ~~[illegible]~~ pari a zero. E QUINDI HA RANGO 0: È L'UNICA MATRICE CON RANGO 0!!

→ (Esempio per il calcolo dei minori)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

Sottomatrici di ordine 3 della matrice A.

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se vado a calcolare i determinanti scopro che sono tutti pari a 0 (perché la seconda riga si mantiene sempre multipla della prima). Allora il rango non è 3 perché non ho nessun determinante di ordine 3 diverso da 0.
Quindi cerco le sottomatrici di ordine 2 → Per esempio

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 2 = 2 \neq 0 \Rightarrow$$ l'ordine massimo dei minori non nulli è 2!!

$$\Downarrow$$

$$\text{rg}\,A = 2$$

Questo è uno dei tre possibili modi per determinare il rango di una matrice.
Talvolta può risultare, però, lungo e laborioso. →

→ Metodo dei minori orlati

Si considera la prima entrata della matrice (questa deve essere $\neq 0$. In caso contrario, si applicano le operazioni elementari riga). Prendo in considerazione la matrice dell'esempio precedente, dove la seconda e la terza riga sono scambiate

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Calcolo il determinante della sottomatrice che ottengo "orlando" 1 (aggiungendo attorno ad esso una colonna e una riga):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Aggiungo un'ulteriore riga e una colonna orlando la precedente sottomatrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

mi fermo: il rango è 2.
(anche perché noto che la terza riga è multipla della prima, ma se non fosse stato così dovevo verificare che tutti i determinanti delle sottomatrici quadrate di ordine tre fossero effettivamente pari a 0!)

Esempio:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2x \quad -z = 0 \\ -x + y \quad = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calcolo direttamente il determinante

3

(Scritture compatte per la ~~calcolo~~ definizione del determinante:

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \Rightarrow \det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{\hat{ij}}|$$)

sottomatrice ottenuta togliendo da A la i-esima riga e la j-esima colonna.

$$\begin{pmatrix} {}^{\oplus}1 & {}^{\ominus}1 & {}^{\oplus}1 \\ {}^{\ominus}-2 & {}^{\oplus}0 & {}^{\ominus}-1 \\ {}^{\oplus}-1 & {}^{\ominus}1 & {}^{\oplus}0 \end{pmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$$

(La terza riga è una combinazione lineare delle prime 2 infatti!)

A questo punto so che il rango è < 3, ma non so esattamente di quanto più piccolo. Perciò lo spazio delle soluzioni Sol Σ è sicuramente > 0 perchè $3 - (\text{qualcosa} < 3)$

Se calcolo il determinante della sottomatrice quadrata di ordine 2 in alto a sinistra, questo viene $\neq 0$. $\Rightarrow \operatorname{rg}\Sigma = 2$.

Ciò comporta che ~~lo spazio della~~ dimensione DELLO SPAZIO delle soluzioni è $3 - 2 = 1$ lo spazio soluzioni è una retta.

Risolvo il sistema con il metodo di eliminazione di Gauss PER DETERMINARE TALE RETTA:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{R'_3 = R_3 + R_1}{\overset{R'_2 = R_2 + 2R_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{R''_3 = R'_2 - R'_3}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

due pivots (infatti il rango è 2)

$$\overset{R'_1 = R'_2 - 2R_1}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{R''_1 = \frac{R'_1}{-2}}{\overset{R''_2 = \frac{R'_2}{2}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Forma canonica: in evidenza i pivots (= pari a 1): NELLE COLONNE DEI PIVOTS OGNI ALTRA ENTRATA È NULLA!

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{3\times3} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{3\times1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x + \frac{1}{2}z \\ y + \frac{1}{2}z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Forma matriciale del sistema

$\rightarrow$

Riprendo la forma scalare, UGUAGLIANDO LE ENTRATE CORRISPONDENTI (4)

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2} z = 0 \\ y = \frac{1}{2} z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{z}{2} \\ y = -\frac{z}{2} \end{cases}$$

equazione cartesiana della retta delle soluzioni: Sol Σ

Il rango era due, infatti ho due variabili legate e una libera.

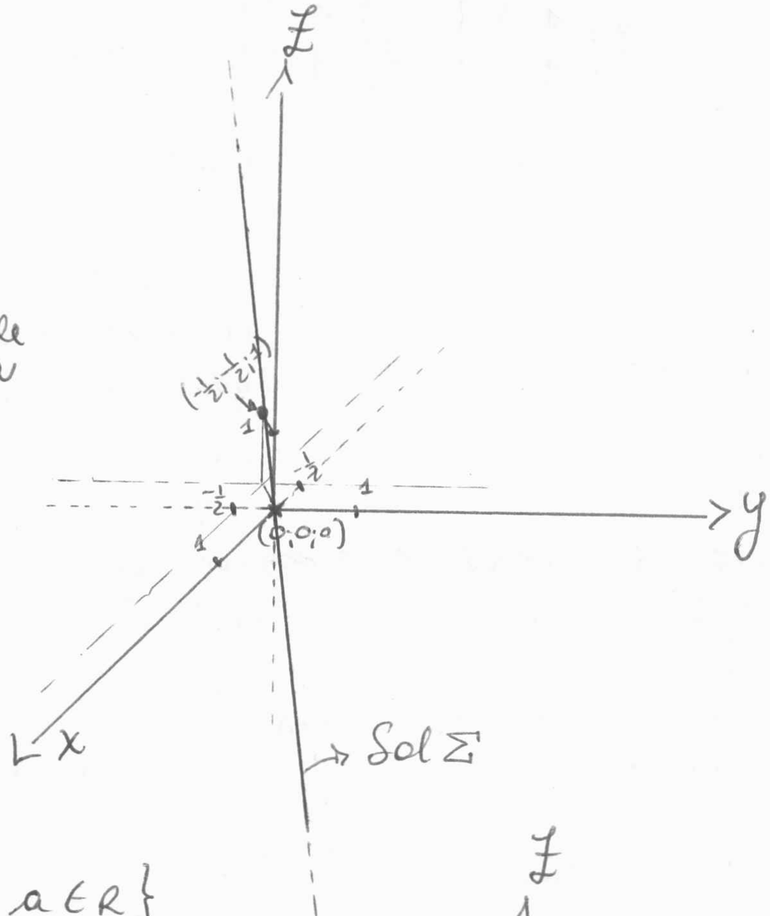
Disegniamo la retta delle soluzioni. Troviamo due punti che le appartengono.
Cerchiamo le soluzioni fondamentali del sistema.

x	y	z
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1

Non do 0 perché so già che una soluzione è di sicuro quella banale.

variabili legate a sx — variabili libere a dx

$\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$ è soluzione fondamentale del sistema

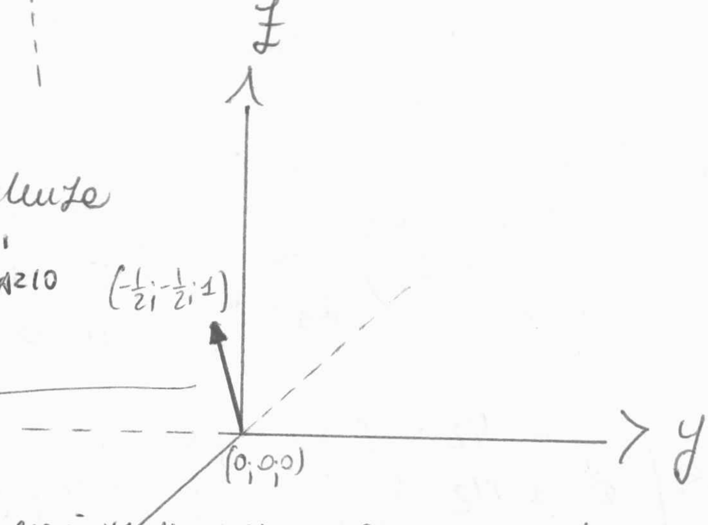


chiamo v_0 il punto $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$
Qualsiasi altro valore a dato a z determinerò multipli della soluzione v_0

$$\text{Sol } \Sigma = \left\{ a\left(-\tfrac{1}{2}; -\tfrac{1}{2}; 1\right),\ a \in \mathbb{R} \right\}$$

è una corrispondenza biunivoca. TRA I VETTORI E I PUNTI DELLO SPAZIO

vettore v_0



I vettori geometrici ~~[illegible]~~ partono sempre dall'origine, CIOE' HANNO IL PRIMO ESTREMO NELL'ORIGINE

Noi disegneremo sempre i vettori geometrici — IL LORO SECONDO ESTREMO INDIVIDUA IL PUNTO DELLO SPAZIO