25/05/2011

1

Dato un operatore ISOMETRICO $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ allora per ogni base $\mathcal{B}$ ortonormale di $\mathbb{R}^n$, $A=[T]_{\mathcal{B}}$ è ortogonale, cioè $AA^T = A^TA = I$ (oppure $A^T = A^{-1}$)

CARATTERISTICHE:

- Se esistono gli autovalori della matrice A possono essere solo ± 1
- Il determinante della matrice ortogonale può essere solo ± 1; INFATTI:

$$|AA^T| = |I| \Rightarrow |A||A^T| = 1 \Rightarrow |A|^2 = 1 \Rightarrow |A| = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$$

Tuttavia il viceversa non è vero, come possiamo provare con il seguente controesempio:

se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad |A| = +1 \quad$ MA $\quad AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq I$

Il determinante è +1, ma il prodotto AA^T non è I quindi la matrice non è ortogonale. Quindi per vedere se una matrice è ORTOGONALE non ~~basta calcolarne~~ il determinante, ma serve il prodotto AA^T oppure:

ESERCIZIO: Una matrice quadrata A è ortogonale $\Leftrightarrow$ le colonne di A sono vettori ortonormali (lo stesso vale per le righe)

(FARE PER ESERCIZIO)

QUANTI TIPI DIVERSI DI OPERATORI ISOMETRICI SI POSSONO DARE SU $\mathbb{R}^n$?

$\boxed{1° \text{CASO}}$ $n=1$ $\quad T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ OPERATORE. QUALI TRA QUESTI SONO ISOMETRICI?
$x \mapsto \alpha x$

Allora $|T(x)| = |x| \Rightarrow |\alpha x| = |x| \Rightarrow |\alpha||x| = |x| \Rightarrow \alpha = \begin{cases} +1 \to \text{IDENTITÀ} \\ -1 \to T(x) = -x \end{cases}$

Questo vuol dire che tra tutte le funzioni lineari in $\mathbb{R}$ solo due sono operatori isometrici. Le matrici associate sono +1 e −1.

$\boxed{2° \text{CASO}}$ $n=2$ $\quad T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e considero una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$,

$A = [T]_{B_{on}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$ A deve essere ortogonale. Allora:

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ (ad - bc = 1) \end{cases}$$

e risolviamo il sistema il quale non è lineare

DETERMINANTE $\to$ (conseguenza delle altre)

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases} \xRightarrow{b \neq 0} \begin{cases} c^2d^2 + b^2c^2 = b^2 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ a = -\frac{cd}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c^2 = b^2 \to c = \begin{cases} b \\ -b \end{cases} \\ \\ \end{cases}$$

matrice simmetrica, mentre

e simmetrica, con $a^2+b^2=1$.

• $A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

• $A_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ questa è matric… ad un…

di un angolo θ attorno…
Calcolando il determ…
che è sempre $+1 =$ …

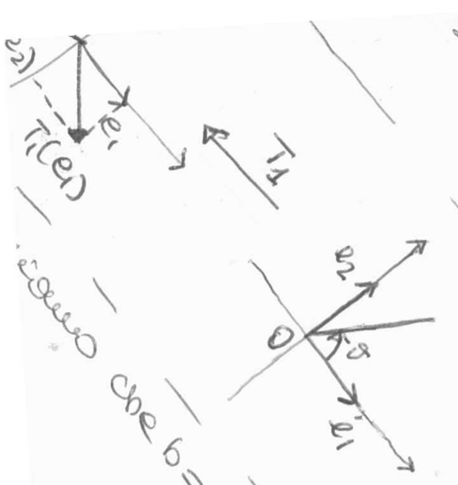
è -1, cioè $|A_1| = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -$ …

$T_2(e_1) = \cos\theta e_1 + \sin$ …

$T_2(e_2) = -\sin\theta e_1$ *

QUESTA È DUNQUE …
ANGOLO θ ATTORN…

T_1: sono quindi …
ALL'ASSE …
CON RO…
$T_1(e$ …
T_1 …

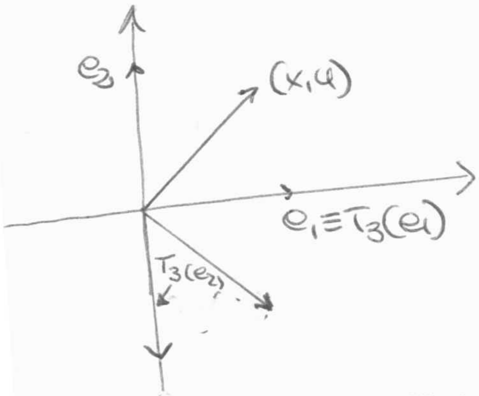


…iamo che $b=0 \Rightarrow$)

se…

③

Ora analizziamo le altre due le quali non sono rotazioni



$$T(xe_1+ye_2) = xT(e_1)+y\,T(e_2)$$

Abbiamo quindi le riflessioni RISPETTO asse $x\,(T_3)$ o sull'asse y (T_4)

TEOREMA DI STRUTTURA DEGLI OPERATORI ISOMETRICI

Dato $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ operatore isometrico allora esiste una base ortonormale $\mathcal{B}_{+n}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che:

$$[T]_{\mathcal{B}_{+n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & & \ddots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & & & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & & & 0 & M_1 & & & 0 \\ 0 & \cdots & & & & & \ddots & & 0 \\ & & 0 & & & & & & M_k \end{pmatrix}$$

dove $M_j = \begin{pmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j \end{pmatrix}$

per $j = 1, \dots, k$

DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE SU n:

$\boxed{1° \text{ CASO}}$ verifica per $n=1$ già fatto (anche per $n=2$)

$\boxed{2° \text{ CASO}}$ si suppone vero il teorema ~~fino~~ a n e lo dimostriamo per $n+1$

Considero $T:\mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ISOMETRICO e supponiamo che esistano autovalori reali per T e quindi autovettori. Sia v uno di questi autovettori: allora $V = \langle\langle v \rangle\rangle$ è invariante per T e allora $V^\perp$ è ancora invariante per T cioè $T\big|_{V^\perp}: V^\perp \longrightarrow V^\perp$; ma essendo

$$\mathbb{R}^{n+1} = V \oplus V^\perp \text{ e } \dim V = 1 \Rightarrow \dim V^\perp = n \Rightarrow V^\perp = \mathbb{R}^n \Rightarrow T\big|_{V^\perp}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

e $T\big|_{V^\perp} = T$ su $V^\perp$ e quindi è ISOMETRICO. Allora per ipotesi induttiva sappiamo che esiste una base $\mathcal{B}_{V^\perp}$ ortonormale tale che

$[T|_{V^\perp}]_{\mathcal{B}_{V^\perp}}$ è $n \times n$ del tipo del teorema.

(4) Considero una base $B_V = \left\{ \frac{v}{\|v\|} \right\}$ $\Rightarrow$ posso prendere come base di $\mathbb{R}^{n+1}$

$B_{\mathbb{R}^{n+1}} = B_V \cup B_{V^\perp} \rightarrow B_{\mathbb{R}^{n+1}}$ è ortonormale e la matrice associata

$[T]_{B_{\mathbb{R}^{n+1}}}$ è $(n+1)\times(n+1)$ così fatta: ricordando che $T\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = \pm \frac{v}{\|v\|}$

abbiamo:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix} \quad \text{con blocco} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & -1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & M_1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & M_k \end{pmatrix}$$

E ciò conclude la dimostrazione per il caso in cui esistono autovettori DI AUTOVALORI REALI