24/11/2010

Dato un sistema lineare omogeneo Σ di K equazioni in n incognite, $\rightarrow$ lo spazio delle soluzioni di Σ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, se $rg\,\Sigma = r$ $\Rightarrow$
LA SUA DIMENSIONE È $n-r$ E DIMOSTREREMO CHE:
le soluzioni fondamentali del sistema sono una base del sottospazio; $Sol(\Sigma)$

ogni combinazione lineare di Σ è ancora una soluzione del sistema

DIMOSTRIAMO INNANZITUTTO CHE $Sol(\Sigma)$ È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE:
Infatti se $X_1 = (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)^T$ e $X_2 = (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n)^T$ sono soluzioni del sistema Σ allora anche $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sono soluzioni.

PROPRIETÀ = dato un elemento $\in Sol(\Sigma)$, un suo multiplo deve appartenere a $Sol(\Sigma)$
E, dati due elementi $\in Sol(\Sigma)$ anche la loro somma $\in Sol(\Sigma) \Rightarrow$ TALI PROPRIETÀ POSSONO ESSERE RIUNITE NELLA SEGUENTE:
ogni combinazione lineare, al variare dei coefficienti, appartiene ancora al sottospazio
SE X_1, X_2 SONO SOLUZIONI $\Rightarrow$
Matricialmente per ipotesi $AX_1 = 0$ e $AX_2 = 0$ con ~~[illegible]~~ $A \in M_{k \times n}$ matrice dei coefficienti.

sono vettori NULLI, è un vettore colonna di k coordinate

$\Rightarrow$ VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ È SOLUZIONE DEL SISTEMA

$\Rightarrow A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) =$ (per la proprietà distributiva) $= A(\lambda_1 X_1) + A(\lambda_2 X_2) =$

$= \lambda_1 (AX_1) + \lambda_2 (AX_2) = \lambda_1 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0$

(COMBINAZIONE LINEARE $\rightarrow$ moltiplico vettori per scalari E POI LI SOMMO)
Il fatto che il sistema sia OMOGENEO è un'ipotesi NECESSARIA

~~[illegible]~~

Siano ~~[illegible]~~ $X_1, \dots, X_{n-r}$ soluzioni fondamentali di Σ, ~~[illegible]~~ essendo $n-r$ il # di variabili libere di Σ $\Rightarrow$ ~~x_1~~ supponendo che le variabili libere (arbitrarie, il numero però è fino) siano le ultime, cioè $x_{r+1}, x_{r+2} \dots x_n$, allora avremo $X_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r, 1, 0 \dots 0)$

$X_2 = (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_r, 0, 1, 0, \dots 0), \dots, X_{n-r} = (\eta_1, \eta_2, \dots \eta_r, 0, 0, \dots, 0, 1)$; LA SOLUZIONE GENERALE DI Σ È COMBINAZIONE LINEARE DELLE SOLUZIONI FONDAMENTALI $\Rightarrow$
$X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$ = sono generatori, CIOÈ sappiamo già che $Sol(\Sigma) = \langle\langle X_1, \dots, X_{n-r} \rangle\rangle$.
Ora facciamo vedere che sono linearmente indipendenti; cioè presa la combinazione lineare $a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_{n-r} X_{n-r} = 0 \Rightarrow a_j = 0 \ \forall j = 1, \dots n-r$

24/11/2010

$$a_1\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} + \dots + a_{m-k}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_n\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}a_1\alpha_1 + a_2\beta_1 + \dots + a_{m-n}\eta_1\\ \vdots\\ a_1\alpha_n + a_2\beta_n + \dots + a_{m-n}\eta_n\\ a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_{m-n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

Tutte le coordinate devono essere uguali, per avere i due vettori uguali:

$\Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_{m-n} = 0$

$\Rightarrow X_1, \dots X_{m-n}$ sono linearmente indipendenti. cvd

PERTANTO
Possiamo trovare le basi ricercando ~~tra~~ le soluzioni fondamentali del Σ

Non sempre ad una matrice viene associato un sistema. Data una matrice $A \in M_{k\times m}$ posso considerare il sotto spazio vettoriale ~~di~~ generato dai "vettori riga" di A, sottospazio di $\mathbb{R}^m$: $\mathcal{R}(A)$

ESEMPIO $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}_{2\times 3}$ I VETTORI RIGA HANNO tante coordinate quante sono le colonne.

Conosco la dimensione dello spazio: il # di vettori riga l. indipendenti è uguale al rg A
Tali vettori formano una base di tale spazio $\mathcal{R}(A)$.

PROPOSIZIONE:
Eseguo operazioni elementari riga: se $A' \sim A \Rightarrow \mathcal{R}(A') = \mathcal{R}(A)$
lo spazio vettoriale generato dalle righe finali DELLA MATRICE è = a quello generato dalle righe iniziali (DELLA MATRICE)
NON CAMBIANO LO SPAZIO VETTORIALE: INFATTI SE A' È OTTENUTA DA A MEDIANTE →
(vedi pg 4)

~~Ecco~~ Analogamente alle righe possiamo considerare le colonne di A

$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}_{2\times 3}$ sono in $\mathbb{R}^2$

Le colonne di una matrice $A \in M_{k\times m}$ generano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^k$, la cui dimensione = rg A, detto "spazio colonna" di A, $\mathcal{C}(A)$

considero lo spazio colonna della matrice equivalente dopo aver fatto un'operazione elementare RIGA

ESEMPIO

$3R_1$ $A \sim \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ Il rango si mantiene, è ancora 2

$\downarrow$

ci sono 2 colonne l. indipendenti

Se A' è equivalente ad A $\Rightarrow$ $\dim \mathcal{C}(A') = \dim \mathcal{C}(A)$. Siamo sempre dentro un $\mathbb{R}^k$

In generale $\mathcal{C}(A')$ e $\mathcal{C}(A)$ sono sottospazi diversi, infatti le operazioni riga cambiano le colonne. IN MODO TOTALMENTE IMPREVEDIBILE E QUINDI $\mathcal{C}(A') \neq \mathcal{C}(A)$

$\mathcal{C}(A') \neq \mathcal{C}(A)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ = questi vettori colonne sono in $\mathbb{R}^4$

Prendere un'operazione elementare riga e mostrare che ottengo uno spazio diverso

$\rightarrow$ FARE IL CONTROESEMPIO

PROPOSIZIONE:

Questi 2 spazi hanno in comune che le colonne li. ind. della matrice A occupano la stessa posizione delle colonne l. INDIPENDENTI della matrice A'; ~~~~

INFATTI

Siano $A \in M_{K\times m}$ e $\operatorname{rg} A = r$ (ho r colonne li. ind.) e siano $\mathcal{C}_{j_1}, \mathcal{C}_{j_2}, \ldots \mathcal{C}_{j_r}$ le colonne di A lin. indipendenti $\rightarrow$ voglio dimostrare che se $A' \sim A \Rightarrow \mathcal{C}'_{j_1}, \mathcal{C}'_{j_2}, \ldots \mathcal{C}'_{j_r}$ sono li. indipendenti

cioè se $a_1\mathcal{C}'_{j_1} + a_2\mathcal{C}'_{j_2} + \ldots + a_r\mathcal{C}'_{j_r} = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 0$

COMPLETO LA COMBINAZIONE $a_1\mathcal{C}'_{j_1} + a_2\mathcal{C}'_{j_2} + \ldots + a_r\mathcal{C}'_{j_r}$ CON TUTTE LE ALTRE COLONNE DI A'

CIOE' Prendo una combinazione lineare di tutte le colonne della matrice, quelle che non compaiono PRECEDENTEMENTE hanno come coefficiente 0 (sono moltiplicate per 0). $\Rightarrow$ AVRO' ALLORA FORMALMENTE

$$0\mathcal{C}'_1 + 0\mathcal{C}'_2 + \ldots + a_1\mathcal{C}'_{j_1} + 0\mathcal{C}'_{j_1+1} + \ldots + a_2\mathcal{C}'_{j_2} + \ldots + a_r\mathcal{C}'_{j_r} + 0\mathcal{C}'_{j_r+1} + \ldots + 0\mathcal{C}'_m = 0$$

Questa scrittura coincide con questa $A'\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_1 \\ 0 \\ a_2 \\ 0 \\ a_r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow$ ho per esinate i coefficienti della combinazione lineare

è soluzione del sistema che ha come matrice dei coefficienti A'

ESEMPIO:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{2\times 3}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{3\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{2\times 1}$$

$\Downarrow$

SISTEMA SCALARE $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

Scompongo questo vettore tramite i vettori colonne

$$\boxed{x\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Queste scritture sono tutte legate

$$A' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ a_2 \\ 0 \\ \vdots \\ a_r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overset{\displaystyle v}{\overset{\parallel}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_1 \\ 0 \\ 0 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix}}} \in Sol(\Sigma')$$

Σ' è il sistema associato ad A': $A'X = 0$

Se $v \in sol(\Sigma') \Rightarrow v \in sol(\Sigma)$ con Σ sistema $Ax = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_1 \\ 0 \\ a_2 \\ 0 \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{PRODOTTO MATRICIALE}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo scrivo ora come combinazione lineare delle colonne A

$$a_1 C_{j_1} + a_2 C_{j_2} + \dots + a_r C_{j_r} = 0$$

(avendo già eliminato quelli con coefficienti $=0$)

ma per ipotesi $C_{j_1}, C_{j_2} \dots C_{j_r}$ sono lin. indipendenti; quindi $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0$

c.v.d.

Se una colonna è combinazione lineare delle altre colonne $C_j = a_1 C_1 + a_2 C_2 + \dots + a_{j-1} C_{j-1} + a_{j+1} C_{j+1} + \dots + a_m C_m \Rightarrow C_j'$ è data dalla stessa combinazione lineare

$C_j' = a_1 C_1' + a_2 C_2' + \dots a_{j-1} C_{j-1}' + a_{j+1} C_{j+1}' + \dots + a_m C_m'$, con $A \sim A'$.

Colonne diverse, ma stessi coefficienti NELLE COMBINAZIONI LINEARI! (DA DIMOSTRARE)

(AD ESEMPIO)

Dimostrare che se C_1, C_2 lin. dipendenti $\Rightarrow C_1', C_2'$ sono l. dipendenti e $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 = 0$ CON

Non tutti i coefficienti ~~[illegible]~~ nulli, $\Rightarrow \alpha_1 C_1' + \alpha_2 C_2' = 0$ –

(da pg 2) $\longrightarrow$

L'OPERAZIONE ELEMENTARE "SCAMBIO DI RIGA" $\Rightarrow$ LE RIGHE NON SONO CAMBIATE E QUINDI $R(A) = R(A')$

CONSIDERO ORA L'OPERAZIONE "MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE": LA j-ESIMA RIGA È SOSTITUITA DA UN SUO MULTIPLO: $\alpha R_j \in$ sottospazio $R(A)$. INFINE ANCHE LA COMBINAZIONE DI DUE RIGHE DI $R(A)$ APPARTIENE AD $R(A)$ PERCIÒ $R(A') = R(A)$ IN SEGUITO AD OGNI OPERAZIONE ELEMENTARE.