23 Maggio 2011 lunedì

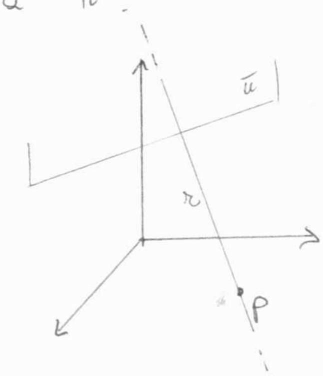
Consideriamo il piano $ax+by+cz+d=0$, piano "π" in $\mathbb{R}^3$ euclideo.
Se vogliamo lavorare sulla perpendicolarità tra rette e/o piani, possiamo sempre ricondurci ai sottospazi vettoriali - LORO DIREZIONI
Il vettore di coordinate (a,b,c) è $\perp$ a π perché $\pi_0: ax+by+cz=0 \Rightarrow$

PR. SCALARE $(a,b,c)\cdot(x,y,z)=0$
il fatto che sia $=0$ ci dice che sono $\perp$ IL VETTORE DI COORDINATE (a,b,c) ED UN VETTORE GENERICO (x,y,z) DEL PIANO π.

$\Rightarrow$ essendo $\perp$ alla direz. il vettore è $\perp$ anche al piano di partenza.
COME CONSEGUENZA:
PRESO $\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z+d=0 \Rightarrow \pi\perp\pi_1 \Longleftrightarrow$ vettori $(a,b,c)\perp(a_1,b_1,c_1)$

$\Rightarrow aa_1+bb_1+cc_1=0$. Questo è il modo più rapido di vedere la perpendicolarità, si lavora con una sola equazione in $\mathbb{R}^3$. Se lavorassimo con le eq. parametriche dovremmo tener conto di 4 vettori.
L'eq. cartesiana DI UNA RETTA è un sistema di 2 equazioni $\Rightarrow$ è più complesso LAVORARE CON EQUAZIONI CARTESIANE CHE CON LE PARAMETRICHE DI UNA RETTA.

ESERCIZIO.
Dato un piano π di equazione $ax+by+cz+d=0$ e un punto $P:(x_0,y_0,z_0)$ $\Rightarrow$ 1) qual è l'equaz. della retta passante per P e $\perp$ a π?



Quali sono i parametri direttori?
Dobbiamo imporre il passaggio per il punto e la $\perp$ perpendicolarità:
$$\Rightarrow \boxed{r: \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}}$$

2) Data invece la retta "r" di parametri direttori (l,m,n) e $P(x_0,y_0,z_0)$
$\Rightarrow$ qual è l'equazione del piano π per P e $\pi\perp r$?
I coeffic. del piano, a,b,c, devono essere proporzionali a (l,m,n)

e devo imporre il passaggio per P. $\Rightarrow$ π: $\boxed{l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0}$.

ESERCIZIO.

Dato $P=(1,-2,3)$ e $\pi: x+y-z=0$. Quali sono le rette passanti per P parallele a π e a distanza $d=3$ dall'asse x?

Equaz. dell'asse x: $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ il piano π passa per l'origine, ed è 1 sottosp. vettoriale (l'eq. è omogenea).

La retta, per essere // a π, deve stare su un piano // a π.
Le rette devono anche passare per P.
Come si trova il piano? Cerchiamo una base di π (visto che è un sottospazio vettoriale).
Cerchiamo l'equaz. parametrica di π. Dobbiamo passare dalle cartesiane alle parametriche. Consideriamo una base del sottospazio:

$z = x+y$

z	x	y
1	0	1
1	1	0

$\Rightarrow B_\pi: \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\Rightarrow$ in forma vettoriale abbiamo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = t+s \end{cases}$$

il piano parallelo a π e passante per P sarà traslato di un vettore:

$\pi_P: \begin{cases} x = s+1 \\ y = t-2 \\ z = s+t+3 \end{cases}$ su questo piano giaceranno le rette che stiamo cercando.

$\pi_P: x+y-z+d=0$, dobbiamo cercare "d" per trovare il nostro piano //.

$d = -x-y+z$, e, siccome P deve stare lì,

$d = -1+2+3 = 4$ $\Rightarrow$ π_P ha equaz. cartesiana $x+y-z+4=0$.

Questo è il piano su cui devono stare le rette.

Ora dobb vedere se l'asse x e il piano sono //.
Se si fanno i conti, si vede che non lo sono ⇒ dovrò cercare la distanza tra una retta generica di questo piano e l'asse x. L'eq. cartes. dell'asse x è $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$;

l'equaz. della retta che sta nel piano e passa per P può essere scritta come
I parametri direttori di una retta generica che sta nel piano di partenza quali saranno? Se ragioniamo con i sottosp. vettoriali, cerco una combin. lin. dei 2 vettori di base B_π.
L'eq. parametrica sarà del tipo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b \\ a \\ a+b \end{pmatrix}$$

, dove a e b sono incognite da trovare attraverso il dato $d = 3$.

Eq. param: $\begin{cases} x = 1 + bt \\ y = -2 + at \\ z = 3 + a \end{cases}$ eq. param. dell'asse x: $\begin{cases} x = s \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

possiamo trovare la distanza tra due punti qualunque delle due rette, imponiamo che sia $= 3$ e possiamo trovare LE SOLUZIONI. (FINIRE PER ESERCIZIO)

OPERATORI NELLO SPAZIO EUCLIDEO $\mathbb{R}^n$

L'operatore è un'applicaz. lineare da $\mathbb{R}^n$ in sé, si parla anche di ENDOMORFISMO.
Qui abbiamo spazi vettoriali che hanno uguali dominio e codominio, e anche le stesse base IN ENTRAMBI. Riprendiamo ora a parlare di applicazioni lineari.
Le applic. tra spazi euclidei sono tante, le più importanti sono le lineari. Vediamo 2 operatori: l'ISOMETRICO e il SIMMETRICO.
Definizioni
OPERATORE ISOMETRICO: $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare, invertibile tale che

$$T(u) \cdot v = u \cdot (T^{-1}(v)) \quad \forall\, u, v \in \mathbb{R}^n$$

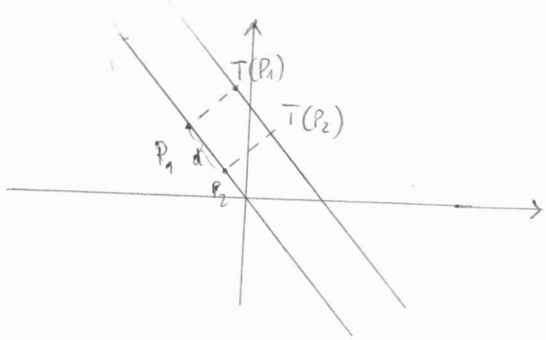
OPERATORE SIMMETRICO: è un'applicazione lineare $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che

$$T(u) \cdot v = u \cdot (T(v)) \quad \forall\, u, v \in \mathbb{R}^n.$$

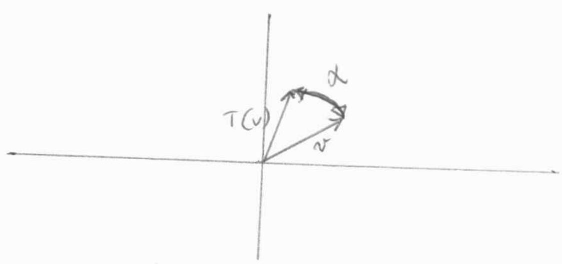
Parliamo dell'operatore isometrico e delle proprietà che possiamo dedurre dalla def. ISOMETRICO significa "che mantiene la METRICA". DATO l'operatore T isometrico, E DATO un vettore $\vec{v}$ avente una determinata norma in $\mathbb{R}^n$ dominio, se ne considero l'immagine, $T(v)$ $\Rightarrow$ $T(v)$ HA LA STESSA NORMA DI v.

Se ho 2 punti di $\mathbb{R}^n$ dominio, posti ad una distanza "d", le immagini saranno ancora a distanza d. Sono i cosiddetti MOVIMENTI RIGIDI, sono TRASFORMAZIONI CHE MANTENGONO LA DISTANZA COME AD es. le traslazione negli spazi affini, ma la traslazione non è un'applicaz. lineare $\Rightarrow$ rientra tra le isometrie ma non tra gli operatori ISOMETRICI

Nel piano esiste 1 qualche applic. lin. che sia anche un'isometria? Ad es. il parallelismo, è un'isometria ma non è lineare $\Rightarrow$ non è un operatore.



e la rotazione? è un'isometria e un operatore lineare $\Rightarrow$ è 1 operat. isom.



• PROPOSIZIONE.

Se $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è isometrico, $\Rightarrow u \cdot v = (T(u)) \cdot (T(v)) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$

DIMOSTRAZIONE

$$T(u) \cdot T(v) = u \cdot T^{-1}(T(u)) = u \cdot v$$

Mantiene perciò il prodotto scalare. Viene mantenuta anche la norma.

• COROLLARIO:

$$u \cdot u = T(u) \cdot T(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

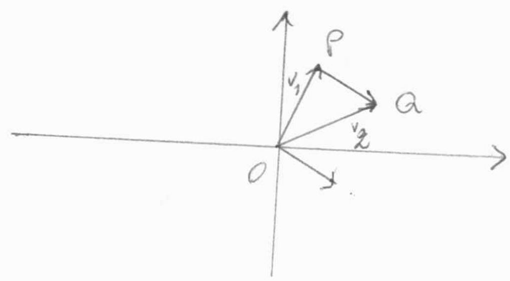
$$\Rightarrow \|u\|^2 = \|T(u)\|^2 \quad \Rightarrow \|u\| = \|T(u)\|$$

L'immagine ha perciò la stessa norma del vettore di partenza.

Di conseguenza, $d(P, Q) = \|Q - P\| = \|T(Q-P)\|$

$$= \|v_Q - v_P\|$$

Nel piano, considero 2 punti P e Q.



Perciò $d(P,Q) = \|Q-P\| = \|T(Q-P)\|$

$$= \|v_Q - v_P\| = \|T(v_Q - v_P)\| = \|T(v_Q) - T(v_P)\| = d(T(Q), T(P))$$

$\Rightarrow$ se l'operatore è isometrico, mantiene la distanza tra punti.
Mantiene anche l'angolo. Infatti, se considero $\cos\alpha = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}$ (tra i vettori u e v)

$$\Rightarrow \cos(T(u), T(v)) = \frac{T(u) \cdot T(v)}{\|T(u)\| \cdot \|T(v)\|} = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} = \cos\alpha.$$

- PROPOSIZIONE

1) Se un sottospazio U è invariante per T isometrico $\Rightarrow$ U è invariante per T^{-1}.

Dim. 1)
Sappiamo che $T(U) \subseteq U$ $\Rightarrow$ T è biiettivo e quindi $T(U) = U$
(è biiettiva, $\Rightarrow T^{-1}(T(U)) \subseteq T^{-1}(U)$)

$\Rightarrow$ di conseguenza $T^{-1}(U) = U$.

PROPOSIZIONE
2) Se U invariante per T, $\Rightarrow$ $U^\perp$ è invariante per T.

Dim. 2)
Devo dimostrare che $T(U^\perp) \subseteq U^\perp$.

Sia $w \in U^\perp \Rightarrow u \cdot w = 0 \ \forall u \in U \Rightarrow$ voglio dim. che $T(w) \in U^\perp$.

Preso $u \in U$, $\Rightarrow$ considero $T(w) \cdot u = w \cdot T^{-1}(u)$.

ma $T^{-1}(u) \in U$ (perché è invariante!!) $\Rightarrow w \cdot T^{-1}(u) = 0$ da cui la tesi.

Perciò anche il sottosp. ortogon. (DI UN SOTTOSPAZIO INVARIANTE) è invariante per l'operatore isometrico.

~~[illegible]~~ gli autospazi rientrano fra i ~~questa~~ sottospazi invarianti.

Come sono fatti gli autovalori di un operatore simmetrico?

Se λ è autovalore per $T \Rightarrow \exists$ vettori $v \neq 0 \ / \ T(v) = \lambda v$, v autovettore.

$\Rightarrow \|T(v)\| = \|v\|$, perché T è isometrico ma $\|T(v)\| = \|\lambda v\|$

se v è autovettore $\Rightarrow \|\lambda v\| = \|v\| \Rightarrow |\lambda| \|v\| = \|v\|$

$\Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow \boxed{\lambda = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}}$

MATRICI ASSOCIATE

Fissiamo ora una base $B_{\perp_n}$ base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, e sia A la matrice associata a T in tale base

$$A = [T]_{B_{\perp_n}} \Rightarrow \text{se } X = [v]_{B_{\perp_n}} \Rightarrow [T(v)]_{B_{\perp_n}} = AX$$

Ora T è isometrico, cioè $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ $(T(u) \cdot T(v)) = u \cdot v$.

e ora scriviamo questo con le matrici e le coord. nella base scelta.

chiamiamo $Y = [u]_{B_{\perp_n}}$, abbiamo $[T(u)]^T_{B_{\perp_n}} \cdot I \cdot [T(v)]_{B_{\perp_n}} =$

essendo in base ortonormale, sarà un'identità la matrice associata al prodotto scalare (Teo di Sylvester).

$= (AY)^T I (AX) = Y^T A^T A X = Y^T I X$, questo è vero $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

perché sia vero PER TUTTI, $\Rightarrow A^T A = I \Rightarrow A^T = A^{-1}$.
$\Rightarrow A$ è detta MATRICE ORTOGONALE.