23/03/2011

Dato un operatore $T: V \longrightarrow V$. Fissata una base $B_V \rightarrow$ abbiamo la matrice associata all'operatore $[T]_{B_V} \Rightarrow$ gli autovalori di T sono le radici del polinomio caratteristico, quello che si trova facendo $|[T]_{B_V} - \lambda I|$

Le caratteristiche di un'applicazione lineare SONO ritrovate, a partire dalla matrice.

Se cambiamo la base non cambiano gli autovalori DELLE MATRICI ASSOCIATE, INFATTI:

Se in V prendiamo la base B' allora abbiamo una nuova matrice $= [T]_{B'_V}$, le due matrici sono simili. Consideriamo due matrici simili $A, B \rightarrow B = S^{-1}AS \Rightarrow$ ~~[illegible]~~

<u>Proposizione</u>: Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico

<u>Dimostrazione</u>: il polinomio caratteristico ~~[illegible]~~ definito da B è $|B - \lambda I| \Rightarrow$ sappiamo che $B = S^{-1}AS$, ~~che~~ lo sostituisco nel determinante $\Rightarrow |S^{-1}AS - \lambda I|$

sostituisco ad $I = S^{-1}S \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ ottengo $|S^{-1}AS - \lambda S^{-1}S|$. λ è uno scalare, quindi commuta $|S^{-1}AS - S^{-1}\lambda S| = |S^{-1}(AS - \lambda S)| = |S^{-1}(A - \lambda I)S|$. Ho il

raccolgo S^{-1}

prodotto di 3 matrici, per cui, secondo Binet DEI DETERMINANTI, $\rightarrow |S^{-1}|\,|A - \lambda I|\,|S| =$

$= |S|^{-1}|A - \lambda I|\,|S| =$ semplifico $\longrightarrow = |A - \lambda I|$

c.v.d.

Dunque per calcolare il polinomio caratteristico DI UN OPERATORE, DELLO SPAZIO VETTORIALE, posso partire da una Base qualunque E QUINDI DA UNA SUA QUALUNQUE MATRICE ASSOCIATA (gli autovalori coincidono e sono gli autovalori di quell'operatore).

Data una matrice $A \in M_{n \times n} \Rightarrow$ posso parlare di autovalori della matrice come di quegli scalari λ tali che $|A - \lambda I| = 0$ (definizione data a partire solo dalla matrice)

Le soluzioni non nulle del sistema associato a questa matrice, sono gli autovettori CIOÈ:

Sostituito uno di tali radici, diciamo λ_0, in $|A - \lambda I|$, allora le soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda_0 I$, danno l'autospazio $E\lambda_0$.

Tutto ciò perché abbiamo una corrispondenza tra matrici quadrate e operatori una volta fissata una base B in V, quindi ABBIAMO UN OPERATORE $T: V \longrightarrow V$ TALE CHE $A = [T]_{B_V}$. POSSIAMO PERCIÒ PORRE

$$[T(v)]_{B_V} = [T]_{B_V}[v]_{B_V} = A[v]_{B_V}$$

se v è un autovettore, allora $[\lambda_0 v]_{B_V} = \lambda_0 [v]_{B_V} = [T(v)]_{B_V}$. PERTANTO!

Posso definire un autovettore a partire da una matrice A. $\Rightarrow v$ è autovettore per $A \Longleftrightarrow v \neq 0$ e $\exists$ uno scalare λ_0, l'autovalore, tale che $A[v]_{B_V} = \lambda_0 [v]_{B_V}$.

Per avere un significato geometrico devo ricavare un'applicazione lineare, quella che ho dato precedentemente ha significato algebrico.

I nostri autovalori sono le radici di un polinomio; mi interessa la molteplicità algebrica delle radici.

Uno scalare λ è radice di un polinomio $p(x)$ se il polinomio si può scomporre in un prodotto di fattori, uno dei quali è $(x-\lambda)^k$ perciò il nostro $p(x)$ si può scrivere come $p(x) = (x-\lambda)^{k} q(x)$.

grado massimo con cui compare il fattore ~~...~~ $x-\lambda$ in $p(x)$ è detto MOLTEPLICITÀ della radice λ
[da un punto di vista algebrico]

Esempio: $(x^2+2x+1)(x-3) = (x+1)^2(x-3)$

questo fattore compare 2 volte nella scomposizione del polinomio!

$\Rightarrow$ -1 è radice con molteplicità 2 e scriviamo $\mu(-1) = 2$, mentre 3 è radice con molteplicità 1, $\mu(3) = 1$.

Ho sempre bisogno della molteplicità di tutte le radici che ho trovato.

DEFINIZIONE

Nel caso del polinomio caratteristico, la molteplicità della radice è detta la molteplicità algebrica dell'autovalore.

Determinato l'autovalore λ_0, di molteplicità $\mu(\lambda_0) = K$ (con $1 \leq K \leq m$), ne troviamo l'autospazio $E\lambda_0$.

Che dimensione può avere questo sottospazio vettoriale di V? Avrà certamente dimensione almeno 1

La sua dimensione è sempre almeno 1 E SARÀ SEMPRE $\leq$ dim V.

Proposizione: la dimensione dell'autospazio E_{λ_0} è $\leq$ alla molteplicità di $\lambda_0 = \mu(\lambda_0)$

la dimensione $E\lambda_0$ è detta MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA di λ_0 $\leftarrow$ DEFINIZIONE

Dimostrazione: supponiamo che la dimensione del mio autospazio $E\lambda_0$ sia $= h$ (sottospazio vettoriale h-dimensionale in V) cambio base di V e prendo i primi h vettori della nuova base in $E\lambda_0 \Rightarrow B_V = \{u_1 \dots u_h, v_1, \dots v_{m-h}\}$ (POSSO COMPLETARE AD UNA BASE B_V DI V)

Com'è fatta la matrice associata all'operatore $[T]_{B_V}$ in questa nuova base?

$$\Rightarrow [T]_{B_V} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ h \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \quad\quad\quad\quad h \\ \quad\quad\quad\quad \downarrow \\ \left(\begin{array}{cccc|ccc} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & \dots & w_1 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & & a_2 & & w_2 \\ \vdots & 0 & \lambda_0 & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \lambda_0 & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & a_r & & w_m \end{array}\right) \end{array}$$

la prima colonna è costruita con: $T(u_1) =$ faccio l'immagine di u_1 TRAMITE $T \Rightarrow T(u_1) = \lambda_0 u_1$ POICHÈ u_1 È UN AUTOVETTORE DI $T \Rightarrow$ LO STESSO PER $u_2, u_3, \dots, u_h \Rightarrow$ ~~...~~
$T(u_2) = \lambda_0 u_2$

$T(u_3) = \lambda_0 u_3$, ..., $T(u_h) = \lambda_0 u_h$

Calcolo dunque il polinomio caratteristico:

$$\left| [T]_{B_V} - \lambda I \right| = \begin{array}{c} \\ \\ \\ h \\ \\ \\ \end{array} \left| \begin{array}{cccc|cccc} \lambda_0-\lambda & 0 & \cdots & 0 & a_1 & b_1 & \cdots & w_1 \\ 0 & \lambda_0-\lambda & \cdots & 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0-\lambda & a_h & b_h & \cdots & w_h \\ \hline & & & & a_{h+1}-\lambda & & & \\ & & 0 & & & b_{h+2}-\lambda & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & a_m & b_m & & w_m-\lambda \end{array} \right|$$

$$\left| [T]_{B_V} - \lambda I \right| = (\lambda_0-\lambda)^h \cdot \left| \begin{array}{cccc} a_{h+1}-\lambda & b_{h+1} & \cdots & w_{h+1} \\ a_{h+2} & b_{h+2}-\lambda & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & w_m-\lambda \end{array} \right| = (\lambda_0-\lambda)^h (q(\lambda))$$

λ_0 ha una molteplicità algebrica di almeno h, pertanto la dimensione geometrica è più piccola, al massimo uguale, della molteplicità algebrica dell'autovalore, IN QUANTO la molteplicità algebrica di λ_0 può crescere se λ_0 è radice anche di $q(\lambda)$, E QUINDI in ogni caso la dimensione di E_{λ_0} è $\leq \mu(\lambda_0)$

Se riesco a scomporre V in autospazi, scompongo lo spazio vettoriale in sottospazi relativi ad autovalori diversi

OSSERVAZIONE: se riesco a decomporre V nella somma di autospazi, cioè $V = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_r}$ (dove questa somma è diretta (IN QUANTO $E_{\lambda_i} \cap E_{\lambda_j} = \{0\}$)) $\Rightarrow$ posso dare una base di V fatta di autovettori e la matrice associata all'operatore in tale base è diagonale.

Le matrici associate a T in altre basi sono allora simili ad una matrice diagonale

Una matrice simile a una matrice diagonale si chiama DIAGONALIZZABILE

Definizione: una matrice quadrata A si dice DIAGONALIZZABILE se è simile ad una matrice diagonale, cioè se $\exists$ S invertibile tale che $D = S^{-1}AS$

PROBLEMA:

Data una matrice A qualunque ci chiediamo se è diagonalizzabile.

$\Rightarrow$ La matrice D è formata dagli autovalori ripetuti tante volte quant'è la loro molteplicità, ed S è la matrice della nuova base formata da autovettori

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ A è diagonalizzabile?

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 6 = 4 - 4\lambda - \lambda + \lambda^2 - 6 = \lambda^2 - 5\lambda - 2$$

polinomio caratteristico della matrice A

$$\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0 \longrightarrow \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25+8}}{2} = \begin{cases} \frac{5-\sqrt{33}}{2} \\ \frac{5+\sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

$$= \left(\lambda - \frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)$$

autovalori relativi alla matrice A
radici caratteristiche di molteplicità = 1

Dobbiamo fare la somma delle molteplicità, se questa somma coincide con il grado del polinomio allora sono riuscita a decomporlo.

Se la somma delle molteplicità NON arriva al grado del $p(x)$, allora mi fermo perché non è diagonalizzabile.

Ora devo studiare le molteplicità geometriche. Qui ho molteplicità 1 quindi molteplicità algebrica e geometrica coincidono.

La matrice A è diagonalizzabile e $D = \begin{pmatrix} \frac{5-\sqrt{33}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5+\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix}$ $S = ?$

$D = S^{-1}AS \implies S = ?$ essa è la matrice che ha per colonne un autovettore relativo al primo autovalore e un secondo autovettore relativo al secondo autovalore

$$\left(1 - \frac{5\sqrt{33}}{2}\right)x + 2y = 0 = E_{\frac{5-\sqrt{33}}{2}} \; ; \; \left(1 + \frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)x + 2y = 0 \; : = E_{\frac{5+\sqrt{33}}{2}}$$

~~[illegible]~~ le colonne di S SONO COSTITUITE DA VETTORI DI BASE DI TALI AUTOSPAZI

Se è diagonalizzabile ogni molteplicità algebrica deve essere uguale ad ogni molteplicità geometrica.