COMPLETIAMO IL DISCORSO DELLA RETTA NEL PIANO (1)

Eq cartesiana di una retta $\mathbb{R}^2$. $ax+by+c=0$

RICAVIAMO l'Eq parametrica " " : $y = \frac{-ax-c}{b}$

~~CHIAMIAMO CON UN PARAMETRO DELLA VARIABILE LIBERA~~

DIAMO UN NOME ALLA VARIABILE LIBERA X E LA CHIAMIAMO t PERCIÒ $x = t$ E ~~CHIAMIAMO~~ ALLA ~~LA~~ VARIABILE DIPENDENTE ASSOCIAMO QUESTA QUANTITÀ

$y = -\frac{a}{b}t - \frac{c}{b}$. $\Rightarrow$ SI HA : $\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{a}{b}t - \frac{c}{b} \end{cases}$: QUESTA È L'EQUAZIONE PARAMETRICA DELLA RETTA

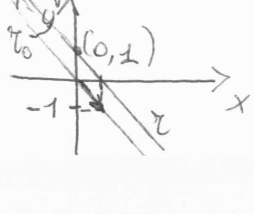
RICAVIAMO l'Eq vettoriale : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{c}{b} \end{pmatrix}}_{\text{questo vettore ci dà lo spostamento}} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} \end{pmatrix}}_{\text{questo è il sottospazio vettoriale}}$

$\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{5} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$ è la direzione di r

Esempio $x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1-x$

$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1-t \end{cases}$ eq parametrica

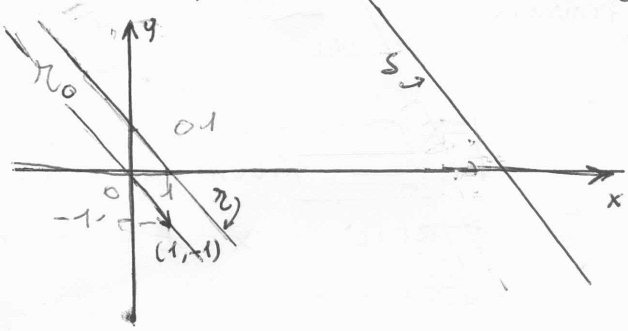
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$



DIAMO L'EQUAZIONE della retta $S // r$ passante per $(3, 10)$:

DEVE AVERE LA STESSA DIREZIONE DI r; PER CUI L'EQUAZIONE VETTORIALE È

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Le cordinate di un vettore che genera la direzione della retta si dicono PARAMETRI DIRETTORI DELLA RETTA.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3+t \\ y = 10-t \end{cases} : \text{equazione parametrica} \Rightarrow \begin{cases} t = x-3 \\ y = 10-x+3 \end{cases}$$

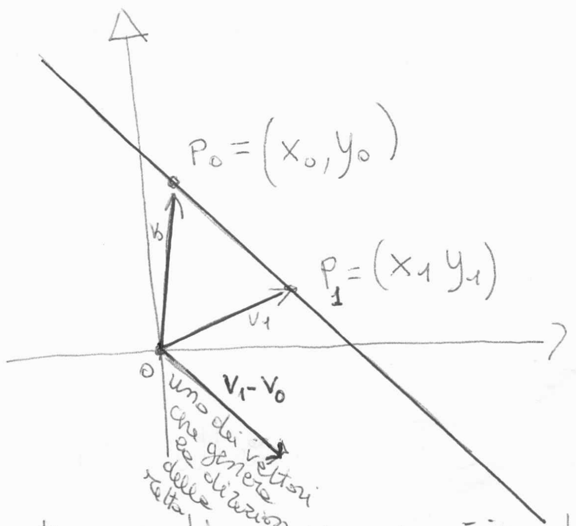
$\Rightarrow$ DA CUI SI HA L' equazione cartesiana della retta $\rightarrow$ $\boxed{y = -x+13}$

Ricaviamo t dalla prima e seconda equazione:

$$\begin{cases} t = x-3 \\ t = \dfrac{10-y}{-1} \end{cases} \Rightarrow \frac{x-3}{1} = \frac{10-y}{-1} \quad \text{EQUAZIONE SEGMENTARIA}$$

In generale se scrivo l'equazione vettoriale

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\overset{\text{eq. segmentaria}}{\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m}}}$$



Il ~~dea~~ vettore $V_1 - V_0$ è il ~~deeee~~ traslato del segmento $P_0 P_1$.

$V_1 - V_0 = (\overset{l}{x_1 - x_0}, \overset{m}{y_1 - y_0})$ genera la direzione di r e quindi $l = x_1 - x_0$ ED $m = y_1 - y_0$ sono parametri direttori di $r \Rightarrow$

$\Rightarrow$ sostituendo in $\Rightarrow \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}$ ottengo:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$: EQUAZIONE DELLA RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI P_0 E P_1.

Riscriviamo l'equazione parametrica della retta $\Rightarrow$ passando all'equazione vettoriale otteniamo:

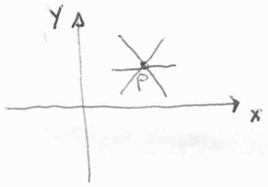
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$$; DIAMO UN ESEMPIO:

Dare eq. parametrica della retta passante per $P_0 = (1,2)$ e $P_1 = (2,3)$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$$ ecco l'eq. parametrica $\Rightarrow$ $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \end{cases}$

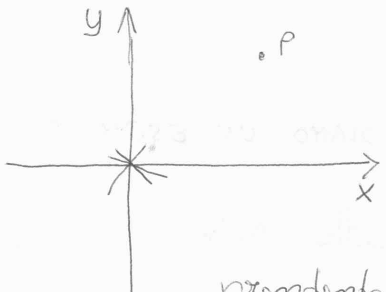
Definizione del fascio di rette del piano

Si chiama <u>fascio proprio</u> di rette nel piano l'insieme di tutte le rette passanti per un punto P detto centro del fascio



Il <u>fascio improprio</u> di rette nel piano è l'insieme di infinite rette tutte parallele fra loro.

COME LI TROVIAMO? in entrambi i casi in generale DETERMINIAMO l'eq. cartesiana (DEL FASCIO) basta considerare due rette passante per il punto P



Date due rette passanti per P

$r_1 .\ a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$r_2 .\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$

L'equazione del fascio è data prendendo una loro combinazione lineare

eq. del fascio di rette $\longrightarrow$ Ⓐ $\lambda(a_1x + b_1y + c_1) + \mu(a_2 + b_2y + c_2) = 0$

Eq. del fascio di rette: $(\lambda a_1 + \mu a_2)x + (\lambda b_1 + \mu b_2)y + \lambda c_1 + \mu c_2 = 0$

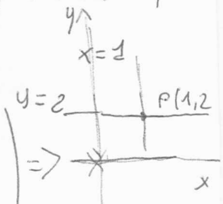
MOLTO PIÙ SEMPLICEMENTE,

Per fare i conti noi dobbiamo avere SOLO un parametro non nullo $\Rightarrow$

Poiché $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$, possiamo supporre sempre uno dei due parametri diverso da zero, ad esempio $\lambda \neq 0 \Rightarrow$ Posso dividere tutta l'equazione (Δ) per λ e ottengo così $(a_1x + b_1y + c_1) + \frac{\mu}{\lambda}(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ Pongo $\frac{\mu}{\lambda} = t$ e avrò $(a_1x + b_1y + c_1) + t \cdot (a_2x + b_2y + c_2) = 0$ equazione più facile da usare, ma dobbiamo sempre ricordare che in questa forma l'equazione generale non permette di ottenere la retta $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Esempio numerico, esercizio:

Determinare la retta del fascio di rette passanti per $P = (1,2)$, passante per $Q = (-3,1)$.

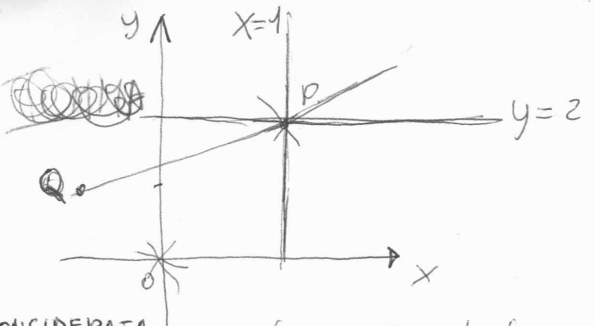


Considero AD ESEMPIO, LE DUE RETTE r_1 e r_2 $r_1: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $r_2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

Equazioni parametriche di r_1: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \end{cases}$ Eq parametrica di r_2: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \end{cases}$ $\Rightarrow$ LE

EQUAZIONI CARTESIANE SONO $r_1: y - 2 = 0$ ED $r_2: x - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Eq del fascio $\lambda(y-2) + \mu(x-1) = 0$



$x-1=0$ e $y-2=0$, sono le rette generatrici DEL FASCIO

CONSIDERATA $\Rightarrow \lambda \neq 0 \Rightarrow (y-2)+t(x-1)=0$ È L'EQUAZIONE DEL FASCIO

imponiamo il passaggio per $Q=(-3,1)$ SOSTITUENDO LE SUE COORDINATE:

$(1-2)+t(-3-1)=0$

$-1-4t=0 \rightarrow t=-\frac{1}{4} \Rightarrow$ SOSTITUENDO A t, $-\frac{1}{4}$, OTTENGO

$y-2+\left(-\frac{1}{4}\right)(x-1)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y-2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4y-x-7=0$: EQUAZIONE DELLA RETTA CERCATA.

Se il fascio è dato tramite due rette generatrici del fascio stesso, r_1 ed r_2 allora $\Rightarrow$ si possono verificare due casi, che sono da controllare:

1) $r_1 \cap r_2 = P$ cioè le due rette si intersecano in un punto, allora il fascio è PROPRIO

2) $r_1 // r_2$ (parallele) $\Rightarrow$ il fascio è IMPROPRIO $\Rightarrow$ $a_1x+b_1y+t=0$

DOBBIAMO VERIFICARE QUALE DEI DUE CASI SI VERIFICA!! STUDIANDO IL RANGO DEL SISTEMA:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$

CIOÈ I RANGHI DELLE MATRICI COMPLETA E INCOMPLETA DEL SISTEMA!

matrici $\left(\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \end{array}\right)$