Data una <u>matrice quadrata</u> $A_{n \times n} = (a_{ij})$ ⇒ allora possiamo associare ad A un numero reale chiamato <u>DETERMINANTE</u> di A (si indica con: $Det A$, $det A$, $|A|$, $\|A\|$), in questo modo: (1)

1) Se $n=1$ $\quad A_{1\times1}$ matrice reale quadrata $\Rightarrow A = a \Rightarrow \det A = a$

2) Se $n=2$ $\quad A_{2\times2} \Rightarrow A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

si ricava facendo i prodotti incrociati

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = (1\cdot4)-(2\cdot3) \Rightarrow -2$$

3) Se $n=3 \Rightarrow A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

si sceglie ad esempio la prima riga (la scelta è casuale) o riga o colonna il risultato non cambia

- Poi si analizzano uno alla volta gli elementi della prima riga
- idealmente si toglie riga e colonna occupata dal I° elemento = ottengo una sottomatrice di ordine 2
- si moltiplica il I° elemento della prima riga x il determinante della sottomatrice

$$a_{11}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\text{complemento algebrico dell'elemento } a_{11}}$$

- Poi proseguo nell'ordine, dunque a_{12} (della matrice iniziale si opera)

$$\begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- determino sottomatrice quadrata

$$\Rightarrow a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- Calcolo l'ultimo elemento con lo stesso procedimento dei precedenti ②

$$a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

moltiplicando ognuno per $(-1)^{i+j}$ → DOVE i e j SONO LA RIGA E LA COLONNA INDIVIDUATE DALL'ELEMENTO a_{ij}

- Tutti i numeri trovati si sommano e avremo il Det A:

COSÌ AVREMO:

$$(-1)^{1+1} a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

~~elevare alla~~ 1 colonna riga

Esempio: SVILUPPIAMO IL DETERMINANTE DI $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ SECONDO LA SECONDA RIGA:

elemento preso

Poi si prende 2 (II° elemento della riga)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}\cdot(-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\cdot(2)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

sta nella prima colonna seconda riga

Togliere riga 1 colonna dove giace −1 e si TROVA

Togliere seconda riga e seconda colonna PER AVERE

$$+(-1)^{2+3}\cdot(-3)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$ fare il calcolo di tutto

togliere seconda riga e terza colonna

→ dai prodotti incrociati escono fuori questi numeri $(-7, -2, 1)$

$$= 1\cdot(-7) + 2(-2) + 3(1) = -8$$

esce fuori da $(-4-3)$

$(-2-0)$

$(1-0)$

Determiniamo il Det di una matrice quadrata 4x4

4) Se $n=4$ $\rightarrow$ Scegliamo 1^a riga: PRENDIAMO IL $1°$ elemento : 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (-1)^2 \cdot 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} +$$

Togliere prima riga e prima colonna da A

PRENDIAMO IL ~~elemento~~ 2° elemento : 2

si prende 3° elemento : 3

$$+ (-1)^3 \cdot 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^4 \cdot 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^5 \cdot 4 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

si toglie prima riga seconda colonna da A

Si toglie prima riga terza colonna da A

si toglie prima riga quarta colonna da A

I DETERMINANTI DELLE MATRICI 3X3 SI ESEGUONO ~~Determinante~~ tutte come l'esempio precedente, SCEGLIENDO UNA RIGA (O UNA COLONNA) in ogni sottomatrice (precedente: primo elemento) E PROCEDENDO COME ILLUSTRATO:

$$= 1\big((2)(3) - 5\big) - 2 \cdot \big((-1)3 + 1(2)\big) + 3\big((-1)\cdot 7 + 2 \cdot 3\big) - 4\big((-1)(-5) - 2(2)\big)$$

$$\begin{vmatrix} \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad \dots =$$

si crea nuove sottomatrice e se ne calcola il determinante.

$$= 1 + 2 - 3 - 4 = -4$$

N.B. Scelta DELLA RIGA O DELLA COLONNA È guidata da quanti zeri ci sono nelle righe o colonne; il risultato non cambia

FORMULA DEL DETERMINANTE PER UNA MATRICE A nxn: (← COMPLEMENTO ALGEBRICO)

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \left| A_{\hat{i}\hat{j}} \right|$$

DOVE $A_{\hat{i}\hat{j}}$ È UNA MATRICE $(n-1)\times(n-1)$ OTTENUTA TOGLIENDO LA i-ESIMA RIGA E LA J-ESIMA COLONNA DI A

Non tutte le operazioni elementari RIGA mantengono lo stesso determinante

LE STESSE OPERAZIONI ELEMENTARI SI POSSONO FARE ANCHE PER COLONNA E vale anche per le colonne IL FATTO CHE IL DETERMINANTE DELLE MATRICI EQUIVALENTI IN GENERALE NON È UGUALE.

~~Esempio~~: CONSIDERIAMO LE'OPERAZIONI ELEMENTARI RIGA UNA AD UNA E ANALIZZIAMO IL DETERMINANTE DELLE MATRICI EQUIVALENTI OTTENUTE

1) Spostiamo due righe

ESEMPIO:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 4-6 = -2$$

determinante

scambio due righe e ottengo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6-4 = 2$$

determinante

> è diverso nel segno
è valido sempre

scambio due colonne ottengo: (è lo stesso)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6-4 = 2$$

In generale lo "scambio di due righe" in una matrice quadrata, cambia il segno del determinante.

2) Moltiplicazione per uno scalare

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = -2$$

moltiplico la prima riga di A per 3, ottengo una matrice equivalente a quella data che sarà $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12-18 = -6$$

determinante

(operazione elementare)

La "moltiplicazione di una riga per uno scalare α" moltiplica il determinante per α

moltiplico per (-4) la seconda riga ottengo:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ -12 & -16\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 2\\ -12 & -16\end{vmatrix} = -16 + 24 = 8$$

PROPRIETÀ

Se moltiplico tutta la matrice di ordine n per uno scalare α allora il determinante della matrice finale sarà il determinante della matrice INIZIALE moltiplicato per α^{n} n = n° righe

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \qquad |2A| = \text{determinante di } A \cdot 2^2$$

$$|A|\,2^2 = 4\cdot(-2) = -8$$

$$\Downarrow \qquad \qquad \|$$

$$\det A = -2 \qquad \begin{vmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{vmatrix} = -8$$

N.B

Se una matrice ha tutta una riga o colonna (CON ENTRATE TUTTE NULLE) $\Longrightarrow$ allora il determinante è 0

Proprietà DEL DETERMINANTE

Es: $\begin{vmatrix}2 & 1 & -2\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$ > ha 2 righe uguali $\Rightarrow$ calcolo det A secondo la terza riga

~~Perché segno = parte dal primo elemento e alternativamente metto gli altri segni~~

$$\to 1\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & -2\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}2 & -2\\ 2 & -2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}$$

se faccio il prodotto incrociato si annulla IN OGNI MATRICE 2x2 IN QUANTO

In generale dunque:

$$\begin{vmatrix}a & b\\ a & b\end{vmatrix} = ab - ab = 0$$

Sempre (sottomatrice ha righe o colonne uguali) determinante = 0

Il determinante di una matrice con due righe (o due colonne) uguali è 0

Se in una matrice due righe sono una multipla dell'altra il determinante è 0, infatti se ho

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = B$$

$\Downarrow$ HA 2 RIGHE UGUALI $\Rightarrow$ ha determinante nullo. allora anche la prima lo avrà $= 0$

ma $|B| = 0 \Rightarrow |A| = 0$ POICHÈ SE UNA MATRICE HA DETERMINANTE NULLO, OGNI MATRICE AD ESSA EQUIVALENTE AVRÀ DETERMINANTE NULLO.

Proprietà determinante:

Supponiamo di avere una matrice quadrata e ~~[illegible]~~ una riga sia data COME ~~[illegible]~~ somma di 2 righe $\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ deve venire ad es. formata così

$$\det \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_{i-1} \\ R_i + R_i' \\ R_{i+1} \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_{i-1} \\ R_i \\ R_{i+1} \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_{i-1} \\ R_i' \\ R_{i+1} \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$$

Esempio

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 -1 = -2$$

$$\Big[\underset{\text{riga}}{(3,4)} = (1 \;\; 1) + (2 \;\; 3) \Big]$$

3, 4

non è cambiato il det TOTALE

N.B <u>Non è vero</u> che il $\det(A+B) = |A| + |B|$

$\downarrow$

non è vero fra intere matrici

CIOÈ $|A+B| \neq |A| + |B|$! FARE ESEMPIO NUMERICO

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix}$$ matrice iniziale

$\sim$ sostituisco la j-esima riga

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ \alpha R_i + \beta R_j \\ R_{j+1} \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix}$$ -> somma di due RIGHE

$\Rightarrow$ det della 2ª matrice $= \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ \alpha R_i \\ R_{j+1} \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ \beta R_j \\ R_{j+1} \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix} = \beta \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix}$

$\downarrow$

una riga è multiplo dell'altra

$\Downarrow$

$\det = 0$

$\Longrightarrow$ Operazione Determinantale, cioè operazione CHE NON CAMBIA IL DETERMINANTE DELLA MATRICE, È LA SOSTITUZIONE DI UNA RIGA CON UNA COMBINAZIONE LINEARE DI QUELLA RIGA MOLTIPLICATA PER 1 CON UN MULTIPLO DI UN'ALTRA RIGA

QUINDI L'UNICA

Operazione elementare determinantale: (non cambia il determinante della matrice) è la sostituzione di una riga con la combinazione lineare di quella riga moltiplicata per 1 con un multiplo di un'altra riga

TEOREMA di BINET

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

2 matrici quadrate dello stesso ordine