19/01/2011

Consideriamo gli anelli $(\mathbb{Z};+;\cdot)$ e $(\mathbb{Q};+;\cdot)$

$\Rightarrow$ Considero l'applicazione $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $n \longmapsto \frac{n}{1}$

DIMOSTRIAMO CHE:

$f$ é un morfismo di anelli: cioé
$$\begin{cases} f(n_1+n_2)=f(n_1)+f(n_2) \\ f(n_1\cdot n_2)=f(n_1)\cdot f(n_2) \end{cases} \quad \boxed{\forall n_1;n_2 \in \mathbb{Z}}$$

INFATTI:

1) $f(n_1+n_2)=\dfrac{n_1+n_2}{1}$

$f(n_1)+f(n_2) = \dfrac{n_1}{1}+\dfrac{n_2}{1}=\dfrac{n_1+n_2}{1}$

2) $f(n_1\cdot n_2)=\dfrac{n_1\cdot n_2}{1}$ ; $f(n_1)\cdot f(n_2)=\dfrac{n_1}{1}\cdot\dfrac{n_2}{1}=\dfrac{n_1\cdot n_2}{1}$

DOMANDA:

L'applicazione $f$ é iniettiva?

$\rightarrow$ dati $n_1; n_2 \in \mathbb{Z}$ tali che $\underbrace{f(n_1)=f(n_2)}_{\text{IPOTESI}} \Rightarrow \underbrace{n_1=n_2}_{\text{TESI DA DIMOSTRARE}}$,

DIMOSTRAZIONE: $f(n_1)=f(n_2) \Rightarrow \dfrac{n_1}{1}=\dfrac{n_2}{1} \Rightarrow \underline{\underline{n_1=n_2}}$

<u>$f$ é iniettiva</u>

DOMANDA:

L'applicazione $f$ é suriettiva?

No, perché ad esempio $\frac{3}{2}$ non é immagine di alcun numero intero tramite $f$

Se considero $\operatorname{Im} f = \left\{\frac{n}{1} \text{ tale che } n\in\mathbb{Z}\right\} \subset \mathbb{Q} \Rightarrow$

$\Rightarrow f\ \mathbb{Z} \longrightarrow \operatorname{Im} f$, $n \longmapsto \frac{n}{1}$ é biettiva, pertanto $\mathbb{Z}$ e questo sottoinsieme di $\mathbb{Q}$, $(\operatorname{Im} f)$, sono <u>ISOMORFI</u>

DEFINIZIONE:

Dato un morfismo fra due strutture algebriche $(A;\star)$, $(B;\square)$ $f: A \to B$; definiamo nucleo di $f$ (abbreviato Ker $f$) come il sottoinsieme di A così definito

Ker = Kernel = nucleo in inglese

$$\text{Ker } f = \{a \in A \mid f(a) = e_B,\ e_B = \text{elemento neutro del codominio}\}$$

PROPOSIZIONE:

Dato $f: A \longrightarrow B$, si dimostri:

1) $f(e_A) = e_B$ ( $e_A, e_B$ ELEMENTI NEUTRI)

2) $\forall\, a \in A \quad f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$

3) $f$ è iniettivo $\longleftrightarrow$ $\text{Ker } f = \{e_A\}$

ESSENDO $f: (A;\star) \to (B;\square)$ UN MORFISMO FRA STRUTTURE ALGEBRICHE

DIMOSTRAZIONE:

1) $f(e_A) = f(e_A \star e_A) = f(e_A) \square f(e_A) \Rightarrow f(e_A) = e_B$

2) $f(e_A) = f(a \star a^{-1}) = f(a) \square f(a^{-1}) = e_B \Rightarrow f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$

ESEMPIO,

IN UNO SPAZIO VETTORIALE: $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ MORFISMO

$(x_1;x_2) \longmapsto (x_1+x_2;\ x_2)$

CIOÈ $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$

$\underbrace{f((1;2))}_{\text{VETTORE}} = (3;2)$

CERCHIAMO $\to$ OPPOSTO = (CHE È L'INVERSO PER L'OPERAZIONE DI SOMMA)

$\underbrace{f((-1;-2))}_{f(a^{-1})} = (-3;-2) = \underbrace{-(3;2)}_{(f(a))^{-1}}$

$f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$

③

③ $f$ iniettiva $\Rightarrow$ $\ker f = \{e_A\}$

QUANDO L'OPERAZIONE È INIETTIVA, DENTRO AL NUCLEO TROVIAMO SOLO L'ELEMENTO NEUTRO

Dato $a \in A$, se $a \in \ker f \Rightarrow f(a) = e_B = f(e_A)$ (PER 1)

Poiché $f$ è iniettiva $\Rightarrow a = e_A$

VICEVERSA: SUPPONIAMO $\ker f = \{e_A\}$ E DIMOSTRIAMO $f$ INIETTIVA, CIOÈ:

Siano $a_1; a_2 \in A$ tali che $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow$ ~~[illegible]~~

tesi $a_1 = a_2$

$$f(a_1 \star a_2^{-1}) \underset{\star}{=} f(a_1) \square f(a_2^{-1}) = f(a_1) \square f(a_2)^{-1} = (\text{POICHÉ } f(a_1) = f(a_2))$$

$\star$ APPLICANDO LA PROPRIETÀ DEL MORFISMO

$$= f(a_2) \square (f(a_2))^{-1} = e_B$$

$$\Rightarrow a_1 \star a_2^{-1} \in \ker f \Rightarrow a_1 \star a_2^{-1} = e_A \Rightarrow \underline{a_1 = a_2}$$

C.V.D.

I morfismi di spazi vettoriali si dicono APPLICAZIONI LINEARI

Esempio 1): $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2+1$ è lineare?

dobbiamo verificare che $\begin{cases} f(\lambda x_1) = \lambda f(x_1) \\ f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2) \end{cases}$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

e $\forall x_1; x_2 \in \mathbb{R}$.

MA: $(x_1+x_2)^2+1 \neq x_1^2 + 1 + x_2^2 + 1$

QUINDI NON È LINEARE!

Esempio 2): $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x+1$

DOBBIAMO VERIFICARE CHE

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall x_1; x_2 \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} f_1(\lambda x_1) = \lambda f_1(x_1) \\ f_1(x_1+x_2) = f_1(x_1) + f_1(x_2) \end{cases}$.

MA $f_1(x_1+x_2) \neq f_1(x_1) + f_1(x_2)$: (INFATTI) $x_1 + x_2 + 1 \neq x_1 + 1 + x_2 + 1 = x_1 + x_2 + 2$

E ORA VERIFICARE $f_1(ax_1) = a f_1(x_1)$ È SUPERFLUO!

NON È LINEARE!

ESERCIZIO:

Data un'applicazione lineare $f: V \to W \Rightarrow$

1) Ker $f$ è sottospazio vettoriale di $V$

2) Im $f$ è sottospazio vettoriale di $W$

DIMOSTRAZIONE: FARE PER ESERCIZIO

---

DEFINIZIONE:

Un'applicazione $f: V \to W$ è $\boxed{\text{lineare}}$ $\Longleftrightarrow$:

1) $f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ $\forall v_1; v_2 \in V$ (SPAZIO VETTORIALE)

2) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ $\forall v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

ESEMPIO: $f\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x;y) \mapsto (-x+3y; 2x-\frac{y}{3})$

1) $f(v_1+v_2) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -(x_1+x_2) + 3(y_1+y_2) \\ 2(x_1+x_2) - \frac{1}{3}(y_1+y_2) \end{pmatrix}$

$f(v_1) + f(v_2) = \begin{pmatrix} -x_1+3y_1 \\ 2x_1 - \frac{1}{3}y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_2+3y_2 \\ 2x_2 - \frac{y_2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1-x_2+3y_1+3y_2 \\ 2x_1+2x_2-\frac{1}{3}y_1-\frac{1}{3}y_2 \end{pmatrix}$ Ok.

2) $f\left(\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \left(-\lambda x + 3\lambda y; 2\lambda x - \frac{1}{3}\lambda y\right)$

$\lambda f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\left(-x+3y; 2x-\frac{1}{3}y\right)$ Ok

Dato uno spazio vettoriale n-dimensionale $V$, fissata una base $B_V = \{v_1 \dots v_n\}$ $\Longrightarrow$ ogni vettore è dato come sua combinazione lineare: $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots x_n v_n$

$x_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1; \dots ; n$

$\Longrightarrow$ possiamo dare un'applicazione $f: V \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$v \longmapsto (x_1; \dots ; x_n)$$

$f$ è un <u>isomorfismo</u> di spazi vettoriali

DIMOSTRARE CHE È UN ISOMORFISMO: LINEARE

BIETTIVO: SURIETTIVO E INIETTIVO (CIOÈ NUCLEO FORMATO DAL SOLO VETTORE NULLO)

DIMOSTRARE PER ESERCIZIO.

POICHÈ MEDIANTE TALE APPLICAZIONE OGNI SPAZIO VETTORIALE N-DIMENSIONALE, FISSATA UNA SUA BASE, È <u>ISOMORFO</u> AD $\mathbb{R}^n$, POSSIAMO IDENTIFICARE OGNI VETTORE DI $V$ CON LA SUA ENNUPLA DELLE COORDINATE E LAVORARE CON ENNUPLE DI NUMERI REALI INVECE CHE CON GLI ELEMENTI DELLO SPAZIO $V$.