(1)

18|10|2010

ESERCIZIO 1

$$\begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ 2x+4y+z-1=0 \end{cases}$$
sistema lineare di due equazioni e tre incognite non omogeneo

$$\begin{cases} x+2y-z=-1 \\ 2x+4y+z=1 \end{cases}$$
MATRICE ASSOCIATA: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{R_2=2R_1-R_2}{\sim}$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$ Matrice già ridotta a gradini $\longrightarrow$ il suo RANGO è uguale a 2
$rg A = rg \Sigma = 2$ POICHE' HA 2 PIVOTS

La dimensione dello spazio ambiente (che è uguale al numero totale delle variabili) è 3, mentre LA DIMENSIONE DELLO ~~lo~~ spazio delle soluzioni del nostro sistema Σ è 1 poichè dim. $Sol(\Sigma) = 3-2 = 1$. ESSENDO *dimensione* $Sol(\Sigma) =$ *dim ambiente* $- rg(\Sigma)$
La soluzione sarà una retta e il nostro sistema di partenza è l'equazione della retta in $\mathbb{R}^3$. CONTINUAMO ORA CON IL METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS PER OTTENERE LA FORMA A GRADINI CANONICA DELLA MATRICE

$\overset{R_2=R_2/3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{R_1=R_1+R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

COLONNE DEI PIVOTS

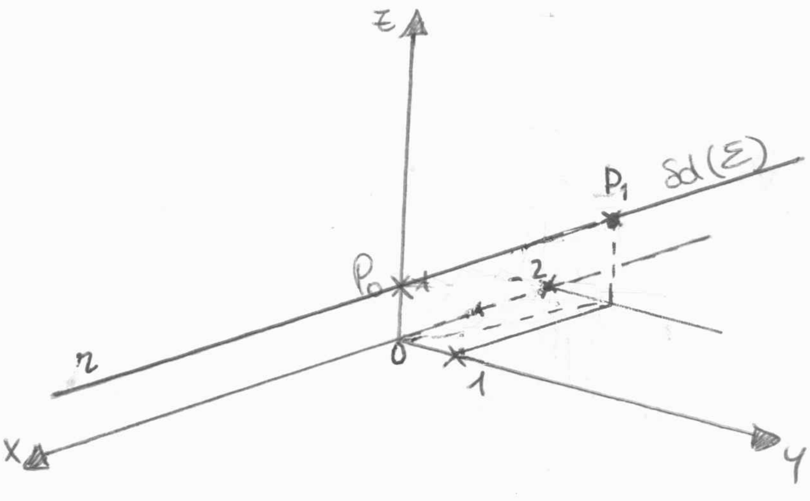
Riassocio il sistema alla matrice: $\begin{cases} x+2y=0 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2y \\ z=1 \end{cases}$

x e z sono due variabili legate, invece y è la variabile libera

$Sol(\Sigma) = \{(-2y, y, 1), y \in \mathbb{R}\}$ SPAZIO DELLE SOLUZIONI

La rappresentazione della retta in $\mathbb{R}^3$, per ora, si costruisce prendendo due punti e poi tracciandola

$P_0 = (0,0,1)$ $\quad$ $P_1 = (-2,1,1)$



Quindi $\begin{cases} x=-2y \\ z=1 \end{cases}$ è l'EQUAZIONE CARTESIANA DELLA RETTA r

Dando un parametro, ad esempio $y=k$ ottengo:

$$\begin{cases} x=-2k \\ y=k \\ z=1 \end{cases}$$

Questa è detta EQUAZIONE PARAMETRICA DELLA RETTA r

SISTEMA PARAMETRICO

ESERCIZIO 1

$$\begin{cases} x+(k-1)y+z=1 \\ (2k-3)x+y+(k-1)z=3-k \\ 2x+ky+kz=k \\ kx+2y+(2k-2)z=4-k \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-1 & 1 & 1 \\ 2k-3 & 1 & k-1 & 3-k \\ 2 & k & k & k \\ k & 2 & 2k-2 & 4-k \end{array}\right)$$

La matrice completa è una 4x4 e la nostra matrice dei coefficienti è una 4x3 quindi al massimo potrà avere rango 3.

$R_2 = R_2-(2k-3)R_1$

$\sim$

Moltiplicando per un parametro mi devo accertare che non sia zero, allora impongo $2k-3\neq 0$ cioè $k\neq 3/2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-(k-1)(2k-3) & k-1-(2k-3) & 3-k-(2k-3) \\ 2 & k & k & k \\ k & 2 & 2k-2 & 4-k \end{array}\right)$$

$R_3-2R_1=R_3$

$R_4=R_4-kR_1$

$k\neq 0$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-(k-1)(2k-3) & k-1-(2k-3) & 3-k-(2k-3) \\ 0 & k-2k+2 & k-2 & k-2 \\ 0 & 2-k(k-1) & 2k-2-k & 4-k-k \end{array}\right)\sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-1 & 1 & 1 \\ 0 & -2k^2+5k-2 & -k+2 & -3k+6 \\ 0 & -k+2 & k-2 & k-2 \\ 0 & -k^2+k+2 & k-2 & -2k+4 \end{array}\right)$$

Cerco di scomporre i monomi presenti nella matrice

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-1 & 1 & 1 \\ 0 & -2(k-2)(k-\frac{1}{2}) & -k+2 & -3(k-2) \\ 0 & -k+2 & k-2 & k-2 \\ 0 & -(k-2)(k+1) & k-2 & -2(k-2) \end{array}\right)$$

$R_2 = R_2/k-2$

$\sim$

$R_3 = R_3/k-2$

$R_4 = R_4/k-2$

PER $k \neq 2$

Semplifico il tutto, dividendo R_2, R_3, R_4 per $k-2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-1 & 1 & 1 \\ 0 & -2k+1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & +k+1 & -1 & +2 \end{array}\right)$$

$k \neq 1/2$

$R_3 = R_2 + (-2k+1) R_3$

$\sim$

$R_4 = R_2(k+1) - R_4(-2k+1)$

$k \neq -1$

moltiplico R_4 per -1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-1 & 1 & 1 \\ 0 & -2k+1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2k & -2k-2 \\ 0 & 0 & -3k & k-5 \end{array}\right)$$

$R_2 = R_2/-2$

$\sim$

$R_3 = 3R_3 + R_4$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k-1 & 1 & 1 \\ 0 & -2k+1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & k & k+1 \\ 0 & 0 & 0 & 2k-1 \end{array}\right)$$

$2k-1$ l'ho già imposta diverso da zero, quindi R_4 è impossibile

POICHÉ L'EQUAZIONE ASSOCIATA È $0 = 2k-1$ $(\neq 0)$

QUINDI IL SISTEMA È IMPOSSIBILE PER $k \in \mathbb{R} - \{3/2, 0, 2, 1/2, -1\}$

Ora recupero il caso in cui $2K-1$ è uguale a zero e sostituisco $K=\frac{1}{2}$ nella matrice prima di quella in cui ho usato $k \neq \frac{1}{2}$!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3/2 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad R_2 = R_3 \quad R_4 = 2R_4$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) \quad R_4 = R_4 + 3R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \quad R_4 = R_3 + R_4$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Quindi anche per $K=\frac{1}{2}$ il SISTEMA è IMPOSSIBILE

Ora ripeto LA RIDUZIONE DELLA MATRICE SOSTITUENDO A K I VALORI CHE HO ESCLUSO, UNO ALLA VOLTA, CERCANDO LA SOLUZIONE DEL SISTEMA IN OGNUNO DI TALI CASI

OPERAZIONI CON LE MATRICI

Considero matrici reali m x n : $M_{k \times n}(\mathbb{R})$

In $M_{k \times n}$ dò un'operazione di "SOMMA": $+ : M_{k \times n} \times M_{k \times n} \to M_{k \times n}$ cioè

(PRODOTTO CARTESIANO)

$(A, B) \longrightarrow C = A + B$

Se $A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots k \\ j=1\dots m}} \wedge B = (b_{ij})_{\substack{i=1\dots k \\ j=1\dots m}} \Rightarrow C\,(a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1\dots k \\ j=1\dots n}}$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to C \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

ho sommato gli elementi corrispondenti

Un'altra ~~[illegible]~~ operazione binaria è la MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE $\lambda \in \mathbb{R}$: $\cdot\lambda : \mathbb{R} \times M_{k \times n} \to M_{k \times n}$ cioè $(\lambda, A) \longrightarrow \lambda A$

Se $A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots k \\ j=1\dots n}} \Rightarrow \lambda A = (\lambda a_{ij})$

ESEMPIO

$$\lambda = 2 \quad A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow 2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

L'opposta di una matrice A è $-A = (-1)A$

ESEMPIO

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \lambda = -1 \Rightarrow -A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

Possiamo a questo punto anche sottrarre due matrici, ovvero:

$$A - B = A + (-B)$$

Un'operazione più complicata è la MOLTIPLICAZIONE tra due matrici, poiché moltiplicando gli elementi corrispondenti non rispetto le proprietà della moltiplicazione, allora introduco il PRODOTTO RIGA-COLONNA

ESEMPIO

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = C = \begin{pmatrix} c_{11} = 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 & c_{12} = 1\cdot(-1) + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 & c_{13} = 1\cdot(-2) + 2\cdot 3 + 3\cdot 1 \\ c_{21} = 4\cdot 1 + 5\cdot 2 + 6\cdot 1 & c_{22} = 4\cdot(-1) + 5\cdot 0 + 6\cdot 1 & c_{23} = 4\cdot(-2) + 5\cdot 3 + 6\cdot 1 \end{pmatrix}$$

Si nota subito che tale prodotto non è sempre possibile, ma solo se il numero delle colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda:

$$A_{k\times n} \cdot B_{n\times q}$$

Quando tale prodotto è fattibile la matrice finale avrà tante righe quante ne aveva la prima e tante colonne quante la seconda

$$A_{k\times n} \cdot B_{n\times q} = C_{k\times q}$$