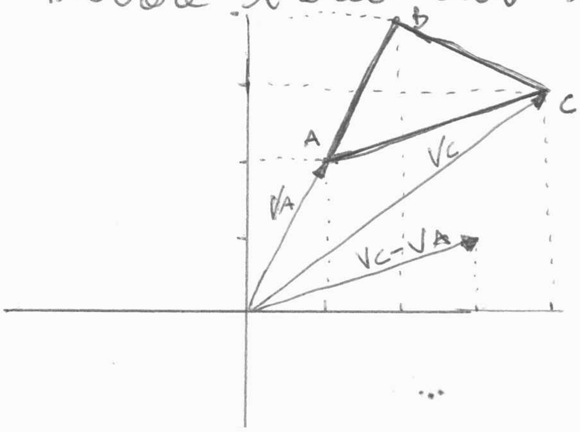
Trovare l'area del triangolo ABC $A=(1,2)$ $B=(2,4)$ $C=4,3$



$AB = V_B - V_A = (1,2) = w_1$

$AC = V_C - V_A = (3,1) = w_2$

CALCOLIAMO L'AREA DEL PARALLELOGRAMMA AVENTE PER LATI I VETTORI w_1 E w_2; L'AREA DEL TRIANGOLO NE SARÀ LA METÀ.

Consideriamo il $\underbrace{\text{Gramiano}}_{\text{DEI VETTORI } w_1 \text{ E } w_2}$ matrice di Gram, le entrate sono i prodotti scalari

$$\text{Gramiano}(w_1, w_2) = \begin{vmatrix} w_1 \cdot w_1 & w_1 \cdot w_2 \\ w_2 \cdot w_1 & w_2 \cdot w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 25 \rightarrow V_{ABCD} = \sqrt{25} = 5$$

L'area del triangolo sarà $Area_T = \frac{5}{2}$

SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL DETERMINANTE DI UNA MATRICE.

Sia R^n uno spazio euclideo e diamo una base B_{I_n} ortonormale in R^n (AD ESEMPIO Base euclidea) Considero $v_1, \dots, v_n \in R^n$ e posto $B_{I_n} = \{e_1, \dots, e_n\}$ allora ogni $v_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} e_i$ $j = 1, \dots n$

Considero la matrice $A = (x_{ij})_{i,j=1 \dots n}$ Determino la matrice di Gram

$$G = \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & \cdots & v_1 \cdot v_n \\ v_2 \cdot v_1 & - & - & \vdots \\ \vdots & & & \\ v_n \cdot v_1 & \dots & \dots & v_n \cdot v_n \end{pmatrix}; \quad v_k \cdot v_j = \sum_{l=1}^{n} x_{lk} e_l \cdot \sum_{i=1}^{n} x_{ij} e_i$$

$$= x_{1k} x_{1j} + x_{2k} x_{2j} \dots x_{nk} x_{nj}$$

esempio in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} x_{11}x_{11}+x_{21}x_{21} & x_{11}x_{12}+x_{21}x_{22} \\ x_{11}x_{12}+x_{21}x_{21} & x_{12}x_{12}+x_{22}x_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \overset{A^T}{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix}} \cdot \overset{A}{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow$

determinante della matrice di Gram

$|G| = |A^T \cdot A| = |A|^2 \Rightarrow$

determinante di $\boxed{|A| = \sqrt{|G|}}$ $\rightarrow$ Volume del parallelepipedo COSTRUITO SUI VETTORI RIGA (O COLONNA) DELLA MATRICE A.

Dato il sistema lineare non omogeneo $\Sigma: AX = B$; $A \in M_{m\times k}$, $X \in M_{k\times 1}$, $B \in M_{m\times 1}$ e supponiamo Σ non risolubile nello spazio $\mathbb{R}^K$ $\Rightarrow$ SCRIVIAMO Σ MEDIANTE COMBINAZIONE LINEARE COLONNE DI A:

$C_A^1 x_1 + C_A^2 x_2 + \dots + C_A^K x_K = B$ dove C_A^j sono colonne di A

B non appartiene allo spazio generato da C_A^j nel caso il sistema non sia risolubile

$B \notin \langle\langle C_A^1, \dots, C_A^K \rangle\rangle$

$B = g + h$ con $g = \alpha_1 C_A^1 + \dots \alpha_K C_A$ ed $h \in \langle\langle C_A^1, \dots, C_A^K \rangle\rangle^\perp$

g è una soluzione del sistema approssimato

$h = B - \alpha_1 C_A^1 - \dots - \alpha_K C_A^K \Rightarrow$ considero $\begin{cases} h \cdot C_A^1 = 0 \\ \vdots \\ h\, C_A^K = 0 \end{cases} \rightarrow$

$(B - \alpha_1 C_A^1 - \dots - \alpha_K C_A^K) \cdot C_A^1 = 0$

$\vdots$

$(B - \alpha_1 C_A^1 - \dots - \alpha_K C_A^K) \cdot C_A^K = 0$

IN QUESTO MODO, POSSIAMO TROVARE UNA SOLUZIONE APPROSSIMATA g DEL SISTEMA;

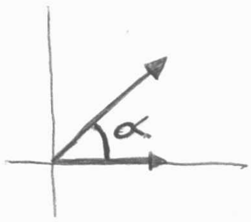
$\|h\|$ è l'errore commesso nel prendere come soluzione la approssimata g

- Abbiamo definito in uno spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ la <u>distanza</u> fra 2 ~~punti~~ punti nello spazio P, Q · $d(PQ) = \sqrt{\|Q-P\|}$

  distanza!

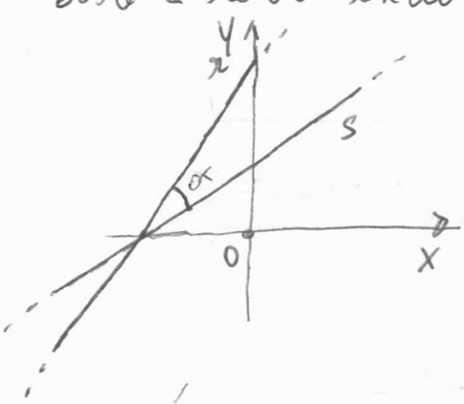
- Consideriamo due vettori $v_1\ v_2$ e <u>l'angolo</u> tra essi compreso

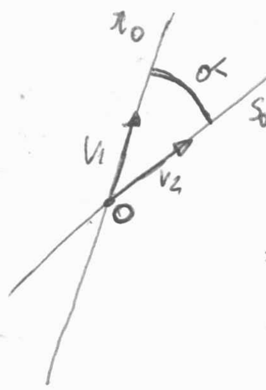
  (dipende dall'orientazione tra i 2 vettori)



$$\cos\alpha = \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}$$

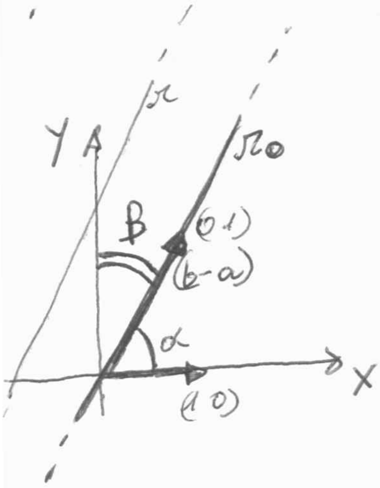
Date 2 rette incidenti in un piano, r e s,





s sposto le rette nell'origine E CONSIDERO v_1, v_2 vettori di base DELLE RETTE

$$\Rightarrow \cos\alpha = \pm \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\|\,\|v_2\|}$$

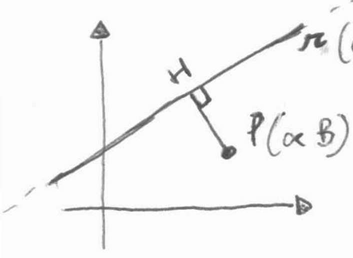


$r = ax + by + c = 0$

$r_0 = ax + by$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \cos \widehat{r_0 x} = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 b^2}} \\ \cos\beta &= \cos \widehat{r_0 y} = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2 b^2}} \end{aligned}\right\} \text{Coseni direttori}$$

Distanza di un punto P da una retta r



forma esplicita della retta

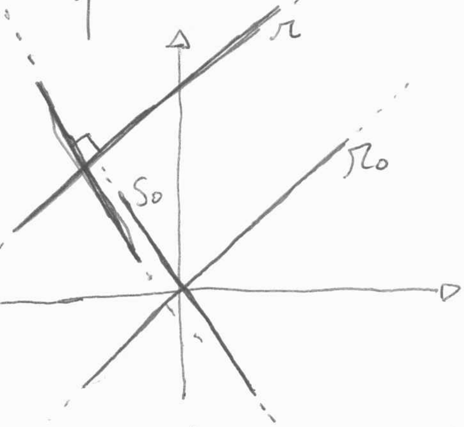
$y = mx + q \rightarrow y = mx\,(B - m\alpha)$

coef angolare

$B = m\alpha + q \rightarrow q = B - m\alpha$

(Da trovare PER ESERCIZIO)

Perpendicolarità tra rette nel piano



$$r \perp s \Leftrightarrow r_0 \perp s_0$$

Considero un vettore V_{r_0} di base di r_0, e un vettore V_{s_0} di base di S_0

- SE LE RETTE SONO DATE IN EQUAZIONI CARTESIANE:

$r: ax + by + c = 0 \rightarrow r_0 = ax + by = 0 \quad V_{r_0} = (b, -a)$

$s = a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad s_0 = a_1x + b_1y = 0 \quad V_{s_0} = (b_1, -a_1)$

$\rightarrow (b, -a)(b_1 - a_1) = 0$

$$\rightarrow \boxed{b b_1 + a a_1 = 0}$$

- SE LE EQUAZIONI SONO IN FORMA ESPLICITA

$r \quad y = mx + q \rightarrow r_0 \quad y = mx \quad V_{r_0} = (1, m)$

$s \quad y = m_1x + q_1 \rightarrow s_0 \quad y = mx_1 \quad V_{s_0} = (1, m_1)$

$\Rightarrow \boxed{(1 \cdot m) \cdot (1 \cdot m_1) = 0}$

$$\rightarrow 1 + m m_1 = 0 \rightarrow \boxed{m_1 = -\frac{1}{m}}$$

- SE LE EQUAZIONI SONO IN FORMA PARAMETRICA

$$r \begin{cases} x = tl + \alpha \\ y = tm + B \end{cases}$$

con m e l parametri direttori

$$s \begin{cases} x = tl_1 + \alpha_1 \\ y = tm_1 + B_1 \end{cases}$$

$r \perp s \Leftrightarrow (l\, m) \cdot (l_1\, m_1) = 0$

$\rightarrow l\, l_1 + m\, m_1 = 0$

~~Sia~~ Considero la retta nello spazio tridimensionale

$$\text{Sia } r: \begin{cases} x = tl + \alpha \\ y = tm + \beta \\ z = tn + \gamma \end{cases} \rightarrow r_0 = \langle\langle (l, m, n) \rangle\rangle$$

allora $$\cos \widehat{r_0 x} = \pm \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

$$\cos \widehat{r_0 y} = \pm \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

$$\cos \widehat{r_0 z} = \pm \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

Considerando una seconda retta s

$$s: \begin{cases} x = t l_1 + \alpha_1 \\ y = t m_1 + \beta_1 \\ z = t n_1 + \gamma_1 \end{cases} \rightarrow s_0 = \langle\langle (l_1, m_1, n_1) \rangle\rangle$$

$$\cos(\widehat{r s}) = \cos(\widehat{r_0 s_0}) = \frac{l l_1 + m m_1 + n n_1}{\sqrt{l^2+m^2+n^2} \cdot \sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}$$

PERPENDICOLARITÀ TRA DUE RETTE:

Rette $r \perp s$: in forma parametrica

$$r \perp s \rightarrow r_0 \perp s_0 \rightarrow (l, m, n) \cdot (l_1, m_1, n_1) = 0 \rightarrow l l_1 + m m_1 + n n_1 = 0$$

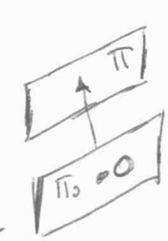
PERPENDICOLARITÀ FRA UNA RETTA ED UN PIANO

Considero un piano in $\mathbb{R}^3$

graficamente uno parallelo a π passante per l'origine

$$\pi = ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow \pi_0 = ax + by + cz = 0$$

$$(a,b,c) \overset{\text{prodotto scalare}}{\cdot} (x,y,z) = 0 \Rightarrow (a,b,c) \perp \pi_0 \text{ e } (a,b,c) \perp \pi$$



I parametri direttori devono essere proporzionali ad a, b, c

$$r \perp \pi \Leftrightarrow r_0 \perp \pi_0 \rightarrow \frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}$$