Sia V uno spazio vettoriale n-dimensionale e B_1, B_2 2 basi di V
$\Rightarrow$ preso $v \in V$, poniamo $[v]_{B_1}$ e $[v]_{B_2}$ i vettori delle coordinate di v
(vettore qualsiasi)
rispettivamente nelle basi B_1 e B_2; e $M^{B_1}_{B_2}$ (matrice) la matrice avente per colonne i vettori delle coordinate della base B_1 espressi in base B_2 $\Rightarrow [v]_{B_2} = M^{B_1}_{B_2} [v]_{B_1}$

ESEMPIO:

$\mathbb{R}^2$: $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$; $B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} \right\}$ $[v]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\Rightarrow [v]_B = ?$ (coordinate di questo vettore nella base B)

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{matriciale}]{\text{scrittura}} \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2\\-1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

vettori della base B espressi mediante la base canonica.

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\-1 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & -2\\-1 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & -2\\-1 & 3\end{pmatrix}}_{I \text{ matrice identità}}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

vettori della base canonica espressi in base B

Voglio dimostrare che $M^{B_1}_{B_2} = \left(M^{B_2}_{B_1}\right)^{-1} \Rightarrow$ date le 2 basi B_1, B_2 prendo

$[v]_{B_1} = \begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ e $[v]_{B_2} = \begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$ $M^{B_2}_{B_1} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$

Tale che matrice è invertibile perché n vettori linearmente indipendenti $\Rightarrow$ rg max $\Rightarrow \det \neq 0$

$[v]_{B_1} = M^{B_2}_{B_1} [v]_{B_2} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$

sistema scalare $\Rightarrow$ (X)
$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ x_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

$[v]_{B_2} = M^{B_1}_{B_2} [v]_{B_1}$
anche da qua posso ricavare un sistema scalare

$$\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_{11} & \dots & b_{1n}\\ \vdots & & \\ b_{n1} & \dots & b_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

prendiamo come incognite sia x che y

Vediamo il sistema (X) come un sistema lineare omogeneo di n equazioni in $2n$ incognite
$\Rightarrow$ la matrice associata a tale sistema è:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix}_{n \times 2n} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & A^{-1} \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ abbiamo dimostrato che $M^{B_2}_{B_1} = \left(M^{B_1}_{B_2}\right)^{-1}$ perché questi è combinazione lineare di x e y come sopra descritto tramite ritorno a sistema: INFATTI

SE RIASSOCIAMO UN SISTEMA ALLA MATRICE FINALE:
$$\begin{cases} y_1 = b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n \\ \vdots \\ y_n = b_{n1}x_1 + \dots + b_{nn}x_n \end{cases} \Rightarrow M^{B_2}_{B_1} = \left(M^{B_1}_{B_2}\right)^{-1}$$

PROPOSIZIONE:

Suppongo di prendere $v_1 \dots v_k$ vettori linearmente indipendenti di uno spazio V n-dimensionale con $k < n$ (meno vettori rispetto la dimensione)

$\Rightarrow$ posso sempre aggiungere $n-k$ vettori, linearmente indipendenti, $\in V$, $w_1, \dots, w_{n-k}$ in modo che $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots w_{n-k}\}$ sia una base.

DIMOSTRAZIONE:

Sia $U = \langle\langle v_1, \dots, v_k \rangle\rangle$: se $U = V$ la base è data dai k vettori $v_1, \dots, v_k$ E ABBIAMO FINITO. Se $U \subset V$ e quindi (U sottospazio di V) $U < V$

$\Rightarrow \exists$ almeno un vettore $w_1 \notin U \Rightarrow w_1, v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti

altrimenti in caso contrario w_1 starebbe nello spazio generato da $v_1, \dots, v_k$

$\Rightarrow$ possiamo GENERARE $U_1 = \langle\langle v_1, \dots, v_k, w_1 \rangle\rangle$, $U < U_1 \Rightarrow$ ABBIAMO 2 POSSIBILITÀ:

$\Rightarrow$ Se $U_1 = V \Rightarrow$ abbiamo terminato e la base di V cercata sarà $\{v_1, \dots, v_k, w_1\}$

Se invece $U_1 < V \Rightarrow \exists\, w_2 \in V$ tale che $w_2 \notin U_1 \Rightarrow v_1, \dots, v_k, w_1, w_2$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow$ pongo $U_2 = \langle\langle v_1, \dots v_k, w_1, w_2 \rangle\rangle \Rightarrow$

o $U_2 = V$ e quindi la base cercata è $\{v_1, \dots, v_k, w_1, w_2\}$

oppure $U_2 < V$ ed ALLORA ESISTE ALMENO UN $w_3 \in V$ TALE CHE $w_3 \notin U_2 \Rightarrow$ $v_1, \dots, v_k, w_1, w_2, w_3$ SONO LIN. INDIPENDENTI $\Rightarrow \dots$ E COSÌ VIA

Il procedimento ha fine perchè la dimensione di V è finita, quindi $\exists$ numero FINITO di vettori linearmente indipendenti $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k}\}$.

c.v.d.

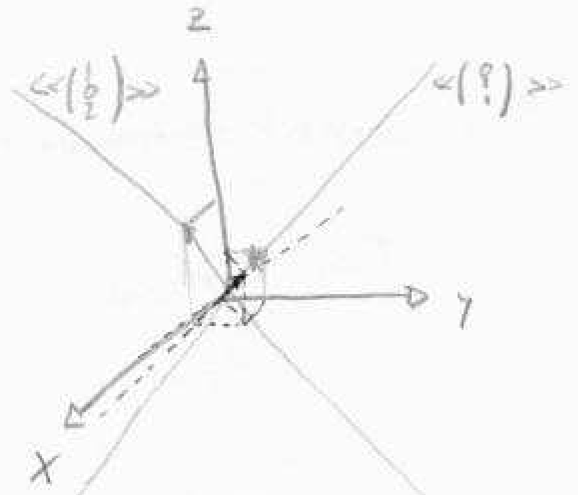
ESEMPIO:

Dare una base di $\mathbb{R}^3$ che contenga il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

considero $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $w_1 \notin$ alla retta generata da v, quindi sono linearmente indipendenti. $\Rightarrow$ considero $U = \langle\langle v, w_1 \rangle\rangle$ (sottospazio vettoriale bidimensionale $\Rightarrow$ 2D $\Rightarrow$ piano $\Rightarrow$ non ricopre tutto $\mathbb{R}^3$)

Cerco un III vettore che mi permetta di generare $\mathbb{R}_3$. Il fatto che non stia sulle rette create dagli altri segmenti (quindi non loro multiplo) non implica che mi generi $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ non deve essere una combinazione lineare degli altri 2

$\Rightarrow$ POSSIAMO DARE UN VETTORE w_2 E VERIFICHIAMO LA LORO LINEARE INDIPENDENZA CALCOLANDO IL RANGO DELLA MATRICE CHE HA PER COLONNE LE COORDINATE DEI TRE VETTORI $\Rightarrow$ AD ESEMPIO CALCOLANDO IL DETERMINANTE DELLA MATRICE $\Rightarrow$



$$M = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

scelgo 3 vettori

$\Downarrow$

Cerco $rg M$, se $=3 \Rightarrow$ 3 vettori linearmente indipendenti
$\Rightarrow$ 3 vettore non è sul piano degli altri 2 $\Rightarrow$ I TRE VETTORI SONO UNA BASE DI $\mathbb{R}^3$.

POSSIAMO USARE Un metodo meno "casareccio": si tratta di trovare equazione del piano e trovare un vettore che non la soddisfa.
VEDIAMO COME DETERMINARE TALE EQUAZIONE:
Formiamo matrice A con vettori di PARTENZA e un vettore generico $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ che voglio che sia dipendente da altri 2 $\Rightarrow rg A = 2$
impongo $\det = 0$ (così solo 2 linearmente indipendenti). (Solo con matrici quadrate si calcola il det, se no lavoro con rg).

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 2 & 1 & z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{z - y - 2x = 0}$$

equazione del piano in $\mathbb{R}^3$ GENERATO DAI DUE VETTORI COLONNA $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ E $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Se no matrice quadrata, POSSIAMO RIDURRE LA MATRICE A GRADINI COL METODO DI GAUSS

$$\overset{2R_1 - R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & -1 & 2x-z \end{pmatrix} \overset{R_2 + R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & y+2x-z \end{pmatrix}$$

deve essere $= 0$ perché ho già 2 pivots e voglio $rg = 2$

$\Rightarrow$ DOBBIAMO IMPORRE $y + 2x - z = 0$
PERCHE' VOGLIO $rg A = 2$ E QUINDI NON DEVONO ESSERCI ALTRI PIVOTS.

Altro metodo : SE VOGLIAMO DETERMINARE UNA BASE DI $\mathbb{R}^n$ CONTENENTE K VETTORI DATI

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

aumento numero colonne aggiungendo n vettori della base canonica

metto vettore

In generale formo una matrice $n \times (k+n)$ mettendo in colonna i k vettori dati e aggiungendo n colonne formate dai vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Riduco con metodo Gauss la matrice a gradini, fino a vedere i pivots: le colonne che contengono i pivots sono quelle linearmente indipendenti: ESSI SONO, nel caso generale, n (perché GIÀ GLI n VETTORI della base canonica sono linearmente indipendenti)

E. IL rg si mantiene. PER OPERAZIONI ELEMENTARI RIGA : $\Rightarrow$ quei vettori che NELLA MATRICE INIZIALE occupano le stesse colonne OCCUPATE DAI PIVOTS NELLA MATRICE RIDOTTA A GRADINI SI DIMOSTRA CHE anche loro sono linearmente indipendenti. E QUINDI COSTITUISCONO LA BASE CERCATA

allora: i vettori che compongono la base cercata sono quelli che nella matrice iniziale occupano le colonne che nella matrice finale contengono i pivots.

Es $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{R_1 - R_2 = R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

già individuati i 3 pivots → I, II, IV colonna

(Tramite operazioni elementari in riga. Se faccio operazioni elementari colonna devo rifare tutto il discorso sulle righe)

1 colonne con pivots

2 le vedi nella matrice iniziale

A

3

riprendo

$$\Rightarrow B_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Le operazioni elementari riga cambiano le colonne della matrice in modo che se A e A' sono matrici equivalenti (ottenute l'una dall'altra secondo operazioni elementari riga) $\Rightarrow$ lo spazio vettoriale generato dalle colonne di A è diverso dallo spazio vettoriale generato dalle colonne di A'. Ma i 2 spazi vettoriali avranno la stessa dimensione (perché rango si mantiene) e le colonne linearmente indipendenti OCCUPANO la stessa posizione nelle 2 matrici e le colonne linearmente dipendenti sono date da combinazioni lineari delle indipendenti con gli stessi coefficienti nelle due matrici.