17/01/2011

GEOMETRIA

(i polinomi hanno solo gradi positivi)

1

Insieme $\mathbb{R}[x] = \{$polinomi in una variabile a coefficienti reali$\}$

$$= \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0 \mid a_j \in \mathbb{R} \quad \forall j = 0, \dots, n\}$$

In $\mathbb{R}[x]$ mettiamo l'operazione di somma: "+" — sommiamo i termini simili

$\forall p(x)$ e $q(x)$ si ha $p(x)+q(x) = (p_k x^k + p_{k-1} x^{k-1} \dots + p_1 x + p_0) + (q_h x^h + q_{h-1} x^{h-1} + \dots + q_1 x + q_0)$ → nuova operazione

che definiamo nuova operazione ➡ $= \sum_{j=0}^{\max(h,k)} (p_j + q_j) x^j$ → somme dei vari coefficienti, somme in $\mathbb{R}$

ESEMPIO: $(2x^3 + 3x) \oplus (-x^4 - x^3 + 2) = 2 + 3x + (2-1)x^3 - x^4 = 2 + 3x + x^3 - x^4$.

* **PROPRIETÀ ASSOCIATIVA**: $\overbrace{P^{(n)}_{(x)} + (Q^{(h)}_{(x)} + K^{(w)}_{(x)})}^{①} = \overbrace{(P^{(n)}_{(x)} + Q^{(h)}_{(x)}) + K^{(w)}_{(x)}}^{②}$ i due polinomi hanno lo stesso grado, sono uguali per la proprietà associativa DELLA SOMMA TRA NUMERI REALI

$$p^{(n)} + \sum_{J=0}^{\max(h,w)} (q_J + k_J) x^J = \underbrace{\sum_{J=0}^{\max(n,h,w)} [p_J + (q_J + k_J)] x^J}_{①} = \underbrace{\sum_{J=0}^{\max(n,h,w)} [(p_J + q_J) + k_J] x^J}_{②}$$

Elemento neutro: $P^{(n)}(x) + Q^{(n)}(x) = P^{(n)}(x) \Rightarrow \sum (p_j + q_j) x^j = \sum p_j x^j \Rightarrow p_j + q_j = p_j \Leftrightarrow q_j = 0 \ \forall j \Rightarrow$

$P^{(n)}(x) + O(x) = P^{(n)}(x)$; **∃ L'INVERSO**: $P^{(n)}_{(x)} + Q^{(n)}_{(x)} = O_{(x)}$ i coefficienti sono l'opposto di quelli di $p(x)$, ovvero, $-p_j \ \forall j$, per potere così ottenere 0.

$(\mathbb{R}[x]; +)$ È UN GRUPPO; VALE ANCHE LA PROPRIETÀ COMMUTATIVA: È GRUPPO ABELIANO

In $\mathbb{R}[x]$ mettiamo l'operazione di moltiplicazione: "$\circ$"

ESEMPIO: $(2x^3 + 3x) \circ (-x^4 - x^3 + 2) = -2x^7 - 2x^6 + 4x^3 - 3x^5 - 3x^4 + 6x$

$\forall p(x), q(x)$ si ha $p(x) \circ q(x) = (p_k x^k + p_{k-1} x^{k-1} + \dots + p_1 x + p_0) \circ (q_h x^h + q_{h-1} x^{h-1} + \dots + q_1 x + q_0)$

➡ $= \sum_{J=0}^{k} p_J x^J \left(\sum_{I=0}^{h} q_i x^i \right)$

VEDERE SE VALE LA PROPRIETÀ ASSOCIATIVA FRA TRE POLINOMI,

$P^{(n)}_{(x)} \circ (Q^{(h)}_{(x)} + K^{(w)}_{(x)}) = (P^{(n)}_{(x)} \circ Q^{(h)}_{(x)}) + (P^{(n)}_{(x)} \circ K^{(w)}_{(x)}) \Rightarrow$ è un anello, ma non un campo ~~...~~

(VALE ANCHE LA PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA)

~~...~~ INFATTI SE CERCO $p(x)$ TALE CHE $P(x) \cdot x = 1$

$P^{(n)}_{(x)} \cdot x = 1 \rightarrow x(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = 1$

$$\underbrace{a_n x^{n+1} + a_{n-1} x^n + \dots + a_1 x^2 + a_0 x = 1}$$

vogliamo che sia di grado 0, ci deve essere solo una costante

perciò $a_n = 0$

$a_{n-1} = 0$ ⇒ ogni monomio vale 0 ⇒ $0 = 1$ IMPOSSIBILE

$a_1 = 0$

$a_0 = 0$

$P^{(n)}_{(x)} = \frac{1}{x}$ ↓ è un **INVERSO** nell'insieme delle **FUNZIONI** razionali

PERCIÒ IN $(\mathbb{R}[x], \circ)$ NON ESISTE L'INVERSO ∀ ELEMENTO E QUINDI $(\mathbb{R}[x], +, \circ)$ NON È UN CAMPO

Con l'operazione interna di "somma" ("+") e l'operazione di moltiplicazione per uno scalare: $\lambda \overset{(n)}{p}(x) = \lambda p_n x^n + \lambda p_{n-1} x^{n-1} + \dots + \lambda p_1 x + \lambda p_0$ (operazione non più interna)

$\lambda: \mathbb{R} \times \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$

$\mathbb{R}[x]$ è uno spazio vettoriale (reale perché il campo è $\mathbb{R}$, IN CUI VENGONO PRESI I COEFFICIENTI DEI POLINOMI)
di dimensione infinita

DEFINIZIONE:
1) SOTTOANELLO: sottoinsieme DI UN ANELLO chiuso rispetto a alle due operazioni DELL'ANELLO
2) SOTTOGRUPPO: SOTTOINSIEME DI UN GRUPPO CHIUSO RISPETTO ALL'OPERAZIONE DEL GRUPPO

Dati due gruppi: $(A;*)$, $(B;\square)$ definiamo MORFISMO (o OMOMORFISMO) fra i due gruppi un'applicazione $f: A \to B$ tale che:

DEFINIZIONE: $$\boxed{\underbrace{f(a_1 * a_2)}_{\text{operazione dentro } A} = \underbrace{f(a_1) \square f(a_2)}_{\text{immagini nel codominio}} \quad \forall a_1, a_2 \in A}$$

Ad esempio, prendiamo $A = \mathbb{R} = B$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ $\quad$ ($\mathbb{R}-\{0\}$ gruppo moltiplicativo)

f è morfismo di gruppi moltiplicativi?
dobbiamo vedere che questa ipotesi sia verificata per ogni coppia di numeri reali ovvero:

$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$(x_1 \cdot x_2)^2 = x_1^2 \cdot x_2^2 \quad \to$ vero!

Ora considero $f: (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}, \cdot)$ $\quad$ la funzione non è cambiata, tuttavia non È PIÙ UN morfismo di gruppi

$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$

$(x_1 + x_2)^2 \overset{?}{=} x_1^2 \cdot x_2^2 \quad \to$ non è vera

DEFINIZIONE:
Dati, invece, due anelli $(A;*,*')$, $(B;\square,\square')$ definiamo MORFISMO fra i due anelli un'applicazione $f: A \to B$ tale che:

$$f(a_1 * a_2) = f(a_1) \square f(a_2)$$
$$f(a_1 *' a_2) = f(a_1) \square' f(a_2)$$

[ANALOGAMENTE PER IL MORFISMO DI CAMPI]

Esempio: $f: (\mathbb{R}, +, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}, +, \cdot)$, $x \mapsto x^2$

f è morfismo di campi? no!

$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad$ NO

Dati due spazi vettoriali $(A;+,\circ\lambda)$, $(B;+,\circ\lambda)$ definiamo **MORFISMO** fra i due spazi vettoriali un'applicazione $f: A \to B$ tale che:

$$f(a_1+a_2) = f(a_1)+f(a_2) \qquad \forall a_1, a_2 \in A$$

$$f(\lambda a_1) = \lambda f(a_1) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Esempio:

$$A = \mathbb{R} = B \qquad f:(\mathbb{R};+,\circ\lambda) \to (\mathbb{R};+,\circ\lambda)$$
$$x \mapsto x^2$$

$f(x_1+x_2) \neq f(x_1)+f(x_2) \Rightarrow$ non è MORFISMO di spazi VETTORIALI

~~Se l'applicazione è biettiva, si parla di ISOMORFISMO~~

DEFINIZIONE:

Se il morfismo $f: A \to B$ è un'applicazione biettiva $\Rightarrow f$ è detto ISOMORFISMO

Due spazi fra cui esiste un isomorfismo si dicono ISOMORFI.