16/5/2011

Siano $v_1, \ , v_K$ vettori di uno spazio euclideo $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ <u>Teorema di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt</u>

Dati $v_1, \ , v_K$ si possono determinare K vettori $u_1, \ , u_K$ ortog. tra loro e tali che $\langle\langle v_1 \rangle\rangle = \langle\langle u_1 \rangle\rangle$, $\langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle = \langle\langle u_1, u_2 \rangle\rangle, \dots, \langle\langle v_1, \dots, v_K \rangle\rangle = \langle\langle u_1, \dots, u_K \rangle\rangle$

Dimostrazione (per induzione su $K = \#$ dei vettori)

per $K = 1$ lo verifichiamo. Prendiamo $u_1 = v_1$ ed è verificato.

Supponiamo il teorema vero fino a $K = l$ e dimostriamolo per $(l+1)$ vettori: PER IPOTESI INDUTTIVA abbiamo determinato i vettori $u_1, \ , u_l$ ortogonali tali che $\langle\langle v_1 \rangle\rangle = \langle\langle u_1 \rangle\rangle, \dots, \langle\langle v_1, \dots, v_l \rangle\rangle = \langle\langle u_1, \dots, u_l \rangle\rangle$

$\Rightarrow$ sia $U = \langle\langle u_1, \dots, u_l \rangle\rangle = \langle\langle v_1, \ , v_l \rangle\rangle$ e proiettiamo ortogonalmente v_{l+1} su $U \Rightarrow v_{l+1} = g + h$ con $g \in U$ e $h \in U^\perp \Rightarrow$ basta prendere $u_{l+1} = h$

$\Rightarrow u_{l+1}$ è ortogonale a tutti i ~~vettori~~ vettori u_T $T = 1, \ , l$ e inoltre $\langle\langle v_1, \dots, v_{l+1} \rangle\rangle = \langle\langle u_1, \dots, u_{l+1} \rangle\rangle$ poiché per prima cosa $\langle\langle v_1, \ , v_T \rangle\rangle = \langle\langle u_1, \ , u_T \rangle\rangle$ per $T = 1, \ , l$ per ipotesi di induzione e quindi rimane solo da dimostrare che $v_{l+1} \in \langle\langle u_1, \dots, u_{l+1} \rangle\rangle$ e $u_{l+1} \in \langle\langle v_1, \dots, v_{l+1} \rangle\rangle$

Ciò è vero perché:

$$v_{l+1} = \underset{\in U}{g} + u_{l+1} = a_1 u_1 + \quad + a_l u_l + u_{l+1} \in \langle\langle u_1, \dots, u_{l+1} \rangle\rangle,$$

mentre:

$$u_{l+1} = v_{l+1} - g = v_{l+1} - b_1 v_1 \dots - b_l v_l \in \langle\langle v_1, \dots, v_{l+1} \rangle\rangle$$

CVD

Esercizio

Ortogonalizzare con il metodo di G-S la base seguente di $\mathbb{R}^3$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$$

Vediamo se sono ortogonali rispetto al PRODOTTO SCALARE STANDARD

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} = 2+0+3 = 5 \neq 0 \Longrightarrow B \text{ non è ortogonale}$$

Per la dimostrazione precedente, detti u_1, u_2, u_3 i vett. della base cercata $\Longrightarrow$ si prende $u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ posto $\mathcal{U}_1 = \ll \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \gg$ trovo la proiez. ortog. di $\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$ su $\mathcal{U}_1 \Longrightarrow \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + u_2$ con $u_2 \in \mathcal{U}_1^\perp$

$$\Longrightarrow u_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} - a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{U}_1^\perp \Longrightarrow u_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow a = \frac{\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|^2} = \frac{5}{3} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow u_2 = \begin{pmatrix}2-\frac{5}{3}\\ -\frac{5}{3}\\ 3-\frac{5}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{5}{3}\\ \frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

Ora determiniamo u_3

Considero $\mathcal{U}_2 = \ll \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} \gg = \ll \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{5}{3}\\ \frac{4}{3}\end{pmatrix} \gg \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ decompongo $u_3 = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} = g_1 + u_3$ con $g_1 \in \mathcal{U}_2 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow g_1 = b_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} = b_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + u_3 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow u_3 = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} - b_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - b_2\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - b_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - b_2\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} - b_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} - b_2\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 - 3b_1 - 5b_2 = 0 \\ 6 - 5b_1 - 13b_2 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si riuscirà a trovare u_3

Considero K vettori $v_1, \dots, v_K$ di $\mathbb{R}^n$ $\Longrightarrow$ posso considerare la matrice

$$\begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & \dots & v_1 \cdot v_K \\ \vdots & & \vdots \\ v_K \cdot v_1 & \dots & v_K \cdot v_K \end{pmatrix}$$

Questa è detta matrice di Gram

Se i vettori $v_1, \dots, v_K$ sono lin. indip. $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow |Gram| \neq 0$, in particolare > 0 perché se considero $U = \langle\langle v_1, \dots, v_K \rangle\rangle \Longrightarrow$ la matrice di Gram è la matrice associata il prodotto scalare, ristretto ad U, nella base $B_U = \{v_1, \dots, v_K\}$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ essendo il prodotto scalare definito positivo, per Jacobj tutti i minori principali sono positivi, compreso il determinante.

Viceversa, se $|Gram| \neq 0 \Longrightarrow$ i vettori che danno origine alla matrice sono lin. indip.

Pertanto $|Gram|$, detto il Gramiano dei vettori $v_1, .., v_K$ sarà nullo $\Longleftrightarrow$ i vett sono lin. dipendenti

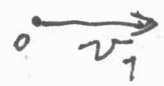
Se i vettori sono ortogonali $\Longrightarrow$ la matrice di Gram è diagonale e il Gramiano $= \|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2 \cdot \ \cdot \|v_K\|^2$.

Se ortogonalizziamo con il metodo di G-S l'insieme dei vett $\{v_1, \ , v_K\}$, trovando i vett. ortogonali $\{u_1, \ , u_K\} \Longrightarrow$ Il Gramiano dei vett $v_1, \ , v_K$ è uguale a $\|u_1\|^2 \cdot \|u_2\|^2 \cdot \ \cdot \|u_K\|^2$

Dati i vettori $v_1, \;, v_K$ in $\mathbb{R}^n \Rightarrow$ allora possiamo costruire il parallelepipedo avente per lati i vettori dati.

Esempi

$n = 1$

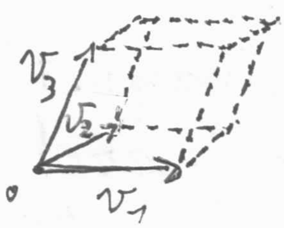


il parallelepipedo sarà il segmento avente lunghezza $= \|v_1\|$

$n = 2$

il parallelepipedo è il parallelogramma disegnato.

$n = 3$



Abbiamo un vero e proprio parallelepipedo

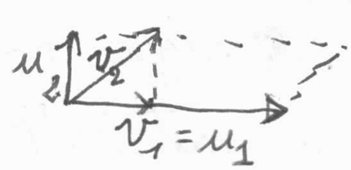
Con $n \geq 3$ non è più possibile disegnarlo ma solo concepirlo matematicamente

Il volume del ~~parallelogramma~~ parallelepipedo costruito su K vettori $= \mathrm{Vol}_{P_{v_1, \;, v_K}} = \sqrt{\text{Gramiano sui vett } v_1, \;, v_K}$

Dimostrazione (per induzione su K)

per $K = 1$ ~~Vol~~ $G(v_1) = \|v_1\| \Rightarrow$ perciò è vera

$K = 2$



$$G(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 \end{vmatrix} = \|u_1\|^2 \cdot \|u_2\|^2$$

$$\text{Area} = \|u_1\| \cdot \|u_2\| = \sqrt{G(v_1, v_2)}$$

Supponiamo vero per i vett. $v_1, \dots, v_e$ e dimostriamolo ~~vero~~ per i vett $v_1, \;, v_e, v_{e+1} \Longrightarrow \mathrm{Vol}_{P_{v_1, \;, v_e}} = \sqrt{\|u_1\|^2 \cdot \ldots \cdot \|u_e\|^2}$

Decompongo $v_{e+1} = g + u_{e+1}$ con $g \in \langle\langle u_1, \dots, u_e \rangle\rangle$

$$u_{e+1} \perp \langle\langle u_1, \ldots, u_e \rangle\rangle \Rightarrow \mathrm{Vol}\, \mathcal{P}_{v_1, \ldots, v_{e+1}} = \mathrm{Vol}\, \mathcal{P}_{v_1, \ldots, v_e} \cdot \|u_{e+1}\|$$

$$\sqrt{\|u_1\|^2 \cdot \ldots \cdot \|u_e\|^2} \cdot \|u_{e+1}\| = \sqrt{\|u_1\|^2 \cdot \ldots \cdot \|u_{e+1}\|^2} = \sqrt{G(v_1, \ldots, v_{e+1})}$$

CVD