Dato $T: V \to V$ operatore (quando dominio e codominio coincidono) B_V e B'_V basi di V => le matrici associate a T in basi diverse sono matrici quadrate legate dalla relazione $[T]_{B'_V} = S^{-1}[T]_{B_V} S$ con S matrice invertibile (matrice data dal cambiamento di base in V).

<u>DEFINIZIONE</u>: $A, B \in M_{n \times n}$ si dicono <u>SIMILI</u> se $\exists\, S \in M_{n \times n}$, invertibile, tale che $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$

<u>SIMBOLI</u> che indicano la relazione di similitudine tra matrici: il più usato è "$\equiv$" (si legge "simile") perciò:

$A \equiv B \iff \exists\, S$ invertibile $\mid B = S^{-1}AS$

Pertanto abbiamo dimostrato che matrici associate allo stesso operatore in basi diverse sono <u>SIMILI</u>

Dimostriamo che la <u>relazione di similitudine</u> tra matrici quadrate <u>è di equivalenza</u>:

1) <u>Riflessiva</u>: dato $A \equiv A$: $\exists\, S$ invertibile $\mid A = S^{-1} A \cdot S$?

2) <u>simmetrica</u>: se $A \equiv B \Rightarrow B \equiv A \Rightarrow \exists\, S \mid B = S^{-1}AS \Rightarrow \exists\, T \in M_{n \times n}$ invert. $\mid A = T^{-1}BT$?

3) <u>transitiva</u>: se $A \equiv B$ e $B \equiv C \Rightarrow A \equiv C$

1) <u>SI</u>! $\exists$ con $S = I$ (matrice <u>identità</u>)

2) da $B = S^{-1}AS$ ricaviamo A:

$$B \cdot S^{-1} = S^{-1} \cdot A \cdot \underbrace{S \cdot S^{-1}}_{I} = S^{-1} \cdot A$$

$$S \cdot B \cdot S^{-1} = \underbrace{S \cdot S^{-1}}_{I} \cdot A = A \Rightarrow A = S^{-1} \cdot B \cdot S$$

perciò T <u>esiste</u>! ed è uguale a <u>S^{-1}</u>

Possiamo anche procedere sostituendo B in $A = T^{-1} B T$:

$$A = T^{-1} \cdot S \cdot A \cdot S^{-1} \cdot T = (T^{-1} \cdot S^{-1}) A \cdot (S \cdot T)$$
$$= (S \cdot T)^{-1} \cdot A \cdot (S \cdot T) \Rightarrow S \cdot T = I$$

3) $B = S^{-1} A \cdot S$ e $C = T^{-1} \cdot B \cdot T$ vogliamo dimostrare l'esistenza di un'altra matrice quadrata $R \in M_{n \times n}$ invertibile $\mid C = R^{-1} \cdot A \cdot R$

sostituisco B

$$\Rightarrow C = T^{-1} (S^{-1} \cdot A \cdot S) \cdot T = (T^{-1} \cdot S^{-1}) \cdot A \cdot (S \cdot T) = (S \cdot T)^{-1} \cdot A \cdot (S \cdot T)$$

quindi la matrice **R** che cercavo è uguale a **$S \cdot T$** c.v.d

pongo $R = S \cdot T$ e voglio verificarne l'invertibilità!
il determinante deve essere $\neq 0$:

$$|R| = |S \cdot T| = |S| \cdot |T| \neq 0$$

se $|S|$ e $|T|$ sono diversi da 0, allora anche il loro prodotto sarà $\neq 0$!

Matrici simili hanno le stesse proprietà.
Il determinante di una matrice è INVARIANTE per similitudine cioè tutte le matrici della stessa classe di similitudine hanno lo stesso determinante.

DIMOSTRIAMO questa PROPOSIZIONE:

se $A \equiv B \Rightarrow |A| = |B|$ Infatti: $A \equiv B \Rightarrow B = S^{-1} \cdot A \cdot S$, S invertibile

$$\Rightarrow |B| = |S^{-1} A \cdot S| = |S^{-1}| \cdot |A| \cdot |S|$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\cancel{|S|}} \cdot |A| \cdot \cancel{|S|}}_{\text{sono numeri moltiplicati}} = |A|$$

$\neq 0$ perché S invertibile

c.v.d

Se il rango è massimo per una matrice invertibile, è massimo per qualsiasi altra matrice simile a quella di partenza.
Se è MASSIMO rimane tale, se non lo è ~~...~~. COSA POSSIAMO DIRE?

Vogliamo ora occuparci del rango di matrici simili

PROPOSIZIONE: Date due matrici ~~quadrate~~ A, S
S invertibile e quindi quadrata, $S \in M_{m \times m}$ => ~~...~~
~~...~~ => prendiamo $A \in M_{k \times m}$ con $rg\, A = r$

$\Rightarrow rg\, A \cdot S = r$ CON $A \cdot S \in M_{k \times m}$

DIMOSTRAZIONE: Dette $C_S^1, C_S^2, \dots, C_S^m$ le colonne (tutte l. indipendenti) di S

$\Rightarrow$ le colonne di $A \cdot S$ sono: $AC_S^1, AC_S^2, \dots, AC_S^m$

ESEMPIO: prendiamo $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3/4 \\ 1/5 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ facciamo il prodotto

$A \cdot S$ ~~...~~

$\Downarrow$

$$A \cdot S = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot 3 & \sqrt{2} \cdot 2 + \frac{3}{4} \cdot 4 \\ \frac{1}{5} \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot 3 & \frac{1}{5} \cdot 2 - \sqrt{3} \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$\underline{A \cdot C_S^1}$ $\underline{A \cdot C_S^2}$

mettiamo in evidenza la 1ª colonna: è proprio $A \cdot$ la prima colonna:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3/4 \\ 1/5 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 3\, 3/4 \\ 1/5 + 3\sqrt{3} \end{pmatrix} = 1\, C_A^1 + 3\, C_A^2$$

$rg\, S \to$ MASSIMO
perciò il $rg\, S$ corrisponde al $rg\, A \cdot S$

PERTANTO:
le colonne di $A \cdot S$ sono COMBINAZIONI LINEARI delle colonne di A QUINDI non è cambiato il numero di colonne l. indipendenti

$\Rightarrow Rg\, A \cdot S = Rg\, A$

c.v.d

Pertanto **COROLLARIO** : $A \equiv B \Rightarrow rg\,A = rg\,B$

la dimostrazione viene effettuata sulla base della proposizione precedente

$A \equiv B \Leftrightarrow \exists\, S$ invertibile $|\; B = S^{-1} \cdot A \cdot S$

$rg\, A \cdot S = rg\, A$ e $rg\, B = rg\, S^{-1}(AS) = rg\, AS = rg\, A$

Per la proposizione precedente

c.v.d.

~~Vogliamo~~ Sia $T: V \to V$ un operatore, $\dim V = n$ vogliamo STUDIARE sottospazi di V che sono invarianti PER T.

Sia W un sottospazio vettoriale di V ($W \leq V$), allora W si dice INVARIANTE per T se $T(W) \subseteq W$

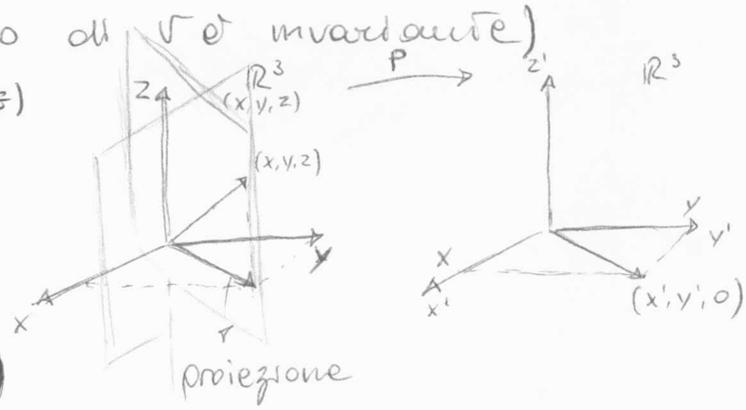
ESEMPIO 1)
Se prendo $id: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v \mapsto v$ ogni sottosp. di $\mathbb{R}^3$ è invariante per id. ~~[illegible]~~)

PROPRIETA' : il vettore nullo e tutto lo spazio vettoriale V, dominio dell'applicazione T, sono SEMPRE sottospazi invarianti detti BANALI, $\forall\, T: V \to V$

(Per $id: V \to V$ ogni sottospazio di V è invariante)

ESEMPIO 2) : $p: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (PROIEZIONE)

$(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$



SONO SOTTOSPAZI INVARIANTI:

1) i piani passanti per asse z $\left(\text{Fascio di asse } \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}\right)$ loro eq: $\alpha x + \beta y = 0$;

2) tutte le rette PER ORIGINE che appartengono al piano $z=0$ sono invarianti

$\begin{cases} z=0 \\ ax+by+cz=0 \end{cases} \to$ stanno tutte in questo piano $z=0$.

3) i vettori DELL'ASSE Z vengono mandati tutti all'origine, che appartiene alla retta

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \to$ perciò questa RETTA è invariante

4) IL PIANO $z=0$