15/11/2010 (1)

* generatori di V, ci sono elementi che costituiscono la base di V

PROPOSIZIONE: Sia V uno spazio vettoriale e $v_1,\dots,v_q$ vettori di V tali che $V = \langle\langle v_1,\dots v_q\rangle\rangle^{*}$ $\Rightarrow$ presi $w_1,\dots,w_p \in V$ con $p>q$ $w_1,\dots,w_p$ sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione: prendiamo una combinazione lineare: $\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2+\dots+\alpha_p w_p=0$

$w_i=\sum_{j=1}^{q} b_{ij}v_j \quad \forall i=1,\dots,p$ → qui altro v si scrive come comb. lineare di v_j

definizione di generatore

andiamo a sostituirlo nella combinazione lineare

$$=\alpha_1(b_{11}v_1+b_{12}v_2+\dots+b_{1q}v_q)+\alpha_2(b_{21}v_1+b_{22}v_2+\dots+b_{2q}v_q)+\dots+\alpha_p(b_{p1}v_1+\dots+b_{pq}v_q)=0$$

raccogliamo i vettori v_j

$$=(\alpha_1 b_{11}+\alpha_2 b_{21}+\dots+\alpha_p b_{p1})v_1+(\alpha_1 b_{12}+\alpha_2 b_{22}+\dots+\alpha_p b_{p2})v_2+\dots+(\alpha_1 b_{1q}+\dots+\alpha_p b_{pq})v_q=0$$

Se $v_1,\dots,v_q$ sono l. indipendenti: sist. lineare con p incognite α_j in q equazioni

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha_1 b_{11}+\dots+\alpha_p b_{p1}=0\\ \alpha_1 b_{12}+\dots+\alpha_p b_{p2}=0\\ \vdots\\ \alpha_1 b_{1q}+\dots+\alpha_p b_{pq}=0\end{cases}$$

(ESSENDO I COEFFICIENTI DELLA COMBINAZIONE LINEARE DEI v_j)

$rg\,\Sigma<p$ (perché ci sono più colonne che righe → $p>q$)

→ $\dim Sol(\Sigma)>0$ perché $\dim Sol(\Sigma)=\underbrace{\#\text{incognite}}_{p}-\underbrace{rg\,\Sigma}_{l}=p-l>0$

$\Rightarrow \exists(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in Sol(\Sigma)$ con $(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\neq(0,\dots,0)$

In conclusione $\Rightarrow$ $w_1,\dots,w_p$ sono linearmente dipendenti

Se $v_1,\dots v_q$ sono l. dipendenti $\Rightarrow$ fra essi ci sono q' vettori l. indipendenti con $q'<q$, che formano una base di V $\Rightarrow$ si fa lo stesso ragionamento di prima con q' al posto di q

PROPOSIZIONE:
(Tutte le basi di $\mathbb{R}^n$ sono formate da n vettori). Ogni base di uno spazio vettoriale V è costituita dallo stesso numero di vettori.

Dimostrazione: Siano $B_1=\{v_1,\dots,v_p\}$ e $B_2=\{w_1,\dots,w_q\}$ due basi di V e supponiamo $p\neq q \Rightarrow$ Sia $p>q$

$\Rightarrow$ considero $V=\langle\langle w_1,\dots,w_q\rangle\rangle$ $\Rightarrow$ per la proposizione precedente $v_1,\dots,v_p$ sono linearmente dipendenti $\Rightarrow$ ASSURDO

perché all'inizio sono vettori di base di V $\Rightarrow p \not> q$

Qualcosa abbiamo sbagliato, perciò non può essere $p>q$

$\Rightarrow$ supponiamo $p<q$ e $V=\langle\langle v_1,\dots,v_p\rangle\rangle$ $\Rightarrow$ per la prec. dimostrazione $w_1,\dots,w_q$ sono linearmente dipendenti, perché sono in numero maggiore dei generatori

ma $w_1,\dots,w_q$ sono l. indipendenti perché costituiscono una base di V $\Rightarrow p\not< q$

$\Rightarrow$ L'UNICA POSSIBILITÀ È $\boxed{p=q}$. Ogni base di uno stesso spazio vettoriale V è costituita dallo stesso numero di vettori. Tale numero è per definizione la DIMENSIONE di V.

ESEMPIO:

Consideriamo $P_3[x] = \{$polinomi in una variabile a coefficienti reali, grado 3$\}$

$= \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3,\ a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$

$P_3[x]$ è uno spazio vettoriale

Voglio vedere se $\{1, x, x^2, x^3\}$ costituisce una base di $P_3[x]$

Dobbiamo far vedere che:

1) sono l. indipendenti;

2) generano $P_3[x]$: INFATTI ogni vettore di $P_3[x]$ si scrive $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ e questo è proprio una comb. lineare dei 4 vettori scelti

1) $\Rightarrow \alpha \cdot 1 + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 = 0$ $\rightarrow$ combinazione lineare posta uguale al VETTORE NULLO dello spazio vettoriale CHE È IL POLINOMIO NULLO

$\Rightarrow$ affinché il polinomio $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$ sia il polinomio nullo tutti i coefficienti devono essere uguali a $0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0 \Rightarrow 1, x, x^2, x^3$ sono l. indip.

$P_3(x) = 2 + 3x + 4x^2 + 5x^3$ vettore (elemento) dello spazio $P_3[x]$

$\Rightarrow$ il vettore delle sue coordinate relativamente alla base scelta $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ si indica così $[p_3(x)]_B$ (ho fissato una delle infinite basi B, ed esprimo le coordinate nella base B)

$[p_3(x)]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ IL VETTORE DELLE COORDINATE

è formato dai coefficienti della combinazione lineare che esprime il vettore dato, nella base B scelta [Posso così lavorare con un vettore avente per coordinate dei numeri reali, TRAMITE LE OPERAZIONI TRA VETTORI NUMERICI]

CONSIDERIAMO ORA LO spazio vettoriale DELLE MATRICI

$\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ $\rightarrow$ le matrici dovranno essere tutte 3×2: ad esempio prendo l'INSIEME

DI VETTORI $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$: È BASE DI $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$?

dobbiamo dimostrare che:

1) sono l. indipendenti e

2) sono generatori.

1) $\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \dots + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \vartheta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

facendo la moltiplicazione e la somma si avrà:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \\ \varepsilon & \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

perché siano uguali $\alpha = 0, \beta = 0 \dots \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = \varepsilon = \vartheta = 0 \Rightarrow$ LE SEI MATRICI PRESE SONO LIN. INDIPENDENTI; ORA DIMOSTRIAMO CHE SONO GENERATORI CIOÈ PRESA UNA MATRICE DEVE ESSERE DATA COME LORO COMBINAZIONE LINEARE: INFATTI DATA A

$\rightarrow$ combinazione lineare delle 6 matrici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots + a_{32}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ è BASE DI $M_{3\times2}(\mathbb{R})$. DUNQUE $M_{3\times2}$ è di dimensione 6 su $\mathbb{R}$. POSSIAMO DARE IL VETTORE DELLE COORDINATE DI A NELLA BASE B:

$$[A]_B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{31} \\ a_{32} \end{pmatrix}$$ $\rightarrow$ è VETTORE in $\mathbb{R}^6$

CAMBIAMENTO DI BASE:

In $\mathbb{R}^2$ consideriamo la base canonica $C = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$

e la base $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}\right\}$ (l. indip)

Considero un vettore $v \in \mathbb{R}^2 \mid [v]_C = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ quali sono le coordinate di v nella base B?, cioè cerco $[v]_B$

vettori di base espressi nella base canonica C

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$$

sis. lineare non om. a 2 incognite $\begin{cases} -3 = a - 2b \\ 4 = 2a + 3b \end{cases}$ $\rightarrow$ ha 1 soluzione perché il rg è massimo visto che i vettori di una base sono l. indipendenti

si può scrivere matricialmente

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$$

det $\neq 0$ perciò è INVERTIBILE

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$$

Date due basi B_1 e B_2 in uno spazio V e un vettore v di cui conosciamo $[v]_{B_1} \Rightarrow [v]_{B_2}$ è dato dal prodotto dell'inversa della matrice che ha ~~per~~ per colonne i vettori delle coordinate dei vettori della base B_2 espressi sulla B_1, moltiplicato per $[v]_{B_1}$ CIOè:

$$\boxed{[v]_{B_2} = M_{B_2}^{B_1}\,[v]_{B_1}}$$