Esempio.

Prendiamo un sistema lineare. (Usiamo per semplicità coefficienti in $\mathbb{Z}$, ma ricordiamo che i coeff. $\in \mathbb{R}$.)

$$\Sigma: \begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Sist. lineare non omogeneo in 3 incogn. Adiamo le lettere in ordine alf.

Usiamo metodo di eliminazione di Gauss.
Associamo una matrice completa al sistema lineare: sarà una 3×4. Portiamo prima i termini noti al II° membro.

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y-z=3 \\ -x-y+2z=0 \\ x-z=-1 \end{cases}$$

passiamo alla matrice completa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 3 \\ -1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & -1 \end{pmatrix}_{3\times 4} \sim$$

ora noi creiamo una matrice equivalente, possiamo dare 1 segno di equivalenza, come "$\sim$" (= EQUIVALENZE). 2 matrici sono equivalenti se sono associate a 2 sistemi che hanno lo stesso insieme soluz.

$$\begin{array}{c} R_2 = R_1 + R_2 \\ \sim \\ R_3 = R_1 - R_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 \end{pmatrix}$$

N.B. La matrici equiv. devono avere lo stesso "ordine", cioè lo stesso numero di righe e colonne ($\Rightarrow$ sarà sempre 3×4). Riscriviamo la I^a riga perchè il I° coeff. $\neq 0$. CONSIDERO La colonna n° 1: RICORDO CHE i primi elementi non nulli di 1 RIGA sono pivots: $\Rightarrow$ voglio gli zeri sotto il primo PIVOT, nella prima colonna.
Ora la I^a colonna è a posto. Ora continuo con la II^a colonna, per creare una matrice in forma "a gradini".
La I^a riga perciò si riscrive e basta.
Nella seconda colonna NOTO CHE nella seconda riga ho uno zero. $\Rightarrow$ nella III^a riga, nella II^a colonna ho un "1", ma non riesco ad eliminarlo perchè sopra di lui c'è uno 0 e non riesco a mandare via l'1

moltiplicando lo zero per qualche coefficiente $\Rightarrow$ SCAMBIO le righe: ②

$$R_2 = R_3 \quad \sim \quad R_3 = R_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

: HO GIÀ UNA MATRICE A GRADINI!

Prima di tutto vedo che non ho equazioni impossibili $\Rightarrow$ il sistema è risolubile. Il rango della matrice, che coincide con il rango del sistema, è 3 (perché ho 3 pivots: ogni riga ha un coeffic. non nullo nella forma A GRADINI). $\Rightarrow$ rg $\Sigma = 3$

rango — sistema iniziale

I sistemi equivalenti, che io ricavo con le matrici equivalenti, hanno tutti lo stesso rango $\rightarrow$ posso ASSEGNARE ALLA MATRICE INIZIALE E QUINDI al sistema iniziale Σ LO STESSO RANGO DELLA MATRICE NELLA FORMA A GRADINI: INFATTI le operazioni elementari riga non cambiano il rango di una matrice. Tutte le matrici equiv. che continuo a trovare, quindi, hanno sempre rango 3. IN QUESTO ESEMPIO.

Noi sappiamo già "geometricamente" quello che abbiamo di fronte:

- le variabili che corrisp. ai PIVOTS sono le var. DIPENDENTI del sistema, E il loro numero coincide con il rango del sistema.

Perciò, rg $\Sigma = \#$ variabili legate (o dipendenti) del sistema.

numero

Infatti, se io riscrivo il sistema dell'ultima matrice $\rightarrow$ scopro che sono tutte variabili legate. QUELLE CHE CORRISPONDONO AI PIVOTS.

SE CONSIDERIAMO i coefficienti, non i termini noti del sistema, il n° dei coeffic. non nulli di ogni riga (PIVOTS) è = rango matrice = = rango sistema.

Se ho un # totale di variabili NEL SISTEMA $\Rightarrow$ la differenza (# variab. totali − # variab. legate) mi darà le variabili INDIPENDENTI, o LIBERE. Il numero delle variabili libere è DUNQUE pari al numero totale delle variabili − numero variabili legate: ma io so che # var. legate = rango sistema. $\Rightarrow$

var. libere = # var. totale − rango Σ

Da un punto di vista geometrico, il n° TOTALE delle variabili ci rappresenta LA DIMENSIONE da un punto di vista spaziale, DELLO SPAZIO AMBIENTE IN CUI STIAMO LAVORANDO

Se n° var = 10, io sarò in uno SPAZIO 10-DIMENSIONALE: $\mathbb{R}^{10}$.

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$: SI LEGGE "$\mathbb{R}$ cartesiano $\mathbb{R}$": sono le coppie ordinate

ordine in cui prendo i numeri mi caratterizza LE COORDINATE DI UN BEN DETERMINATO PUNTO DELLO SPAZIO.

$= \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ RAPPRESENTA GEOMETRICAMENTE un piano, mentre $\mathbb{R}$ da solo è IN CORRISPONDENZA BIUNIVOCA CON una retta.

$\mathbb{R}^3$ è invece lo spazio tridimensionale; insiemisticamente parlando,

è $\mathbb{R}_3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$: È IN CORRISPONDENZA BIUNIVOCA CON L'INSIEME DEI PUNTI DI UNO SPAZIO DI DIMENSIONE 3.

Fisicamente parlando, ci si limita alla dimensione 3. Ma per la matematica, questa definizione può ~~[illegible]~~ ASSUMERE VALORI ANCHE INFINITAMENTE GRANDI, proseguendo all'∞ le nostre "dimensioni". Il n° TOTALE di variabili è la dimensione dello spazio su cui sto lavorando.

Noi abbiamo 3 variabili $\Rightarrow$ sto lavorando in uno spazio tridim., dove ogni TERNA DÀ LE COORDINATE di un punto.

~~La dimensione dello spazio~~ LO SPAZIO dove stiamo lavorando lo chiamo AMBIENTE; la nostra dimensione dello spazio-ambiente, che è = al # delle variabili totali.

$\Rightarrow$ La dimensione spazio-ambiente $-$ rg Σ = n° variabili libere

Le variabili libere mi danno il GRADO DI LIBERTÀ del sistema: IN UN CERTO SENSO, MI DICONO QUANTO È GRANDE LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DEL SISTEMA. SE HO UN'UNICA VARIABILE LIBERA $\Rightarrow$ ho una corrispondenza tra i numeri $\mathbb{R}$ e le soluzioni del sistema PERCHÉ AD OGNI VALORE ATTRIBUITO A TALE VARIABILE ASSOCIO UNA SOLUZIONE DEL SISTEMA

variano per conto loro, do loro dei valori e loro mi danno quelli delle altre variab. legate

Quante sono le soluz? Quanti sono i numeri $\mathbb{R}$. Se io ho un'unica variabile libera $\rightarrow$ può assumere qualsiasi valore in $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ ho ∞^1 soluzioni del sistema, $\Rightarrow$ ho uno spazio DELLE SOLUZIONI di dimensioni 1, ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ $\Rightarrow$ è una RETTA.

Se ne ho 2 di variabili libere, $\rightarrow$ queste possono assumere COPPIE INDIPENDENTI DI VALORI REALI

$\rightarrow$ per le variabili libere, avrò delle "coppie di $\# \in \mathbb{R}$" CHE DANNO DI CONSEGUENZA VALORI ALLE VARIABILI LEGATE

$\Rightarrow$ la dimensione dello SPAZIO DELLE SOLUZIONI del mio sistema sarà 2 $\rightarrow$ e quindi corrisponderà ad un PIANO.

$\Rightarrow$ dimensione spazio soluzioni = dimensione spazio ambiente $-$ rg Σ

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ = # variab. totale

Nel mio caso,

dimensione spazio soluzioni = dimensione spazio amb. − rg Σ

$$= 3 - 3 = 0$$

E cosa corrisponde AD UNO spazio di dimensione "0"? UN PUNTO.

⇒ il sistema ha una sola soluzione nell' $\mathbb{R}_3$, che corrisponde perciò ad un punto.

Adesso continuiamo con il procedimento di Gauss in ASCESA. (ma visto che sono sistemi "piccoli", senza tante variabili né equazioni, si possono fare anche per sostituzione).

⇒ vado a trovare un'altra matrice equivalente.

Ora ripartiamo dall' ultimo pivot, e vogliamo che in quelle colonne sopra IL PIVOT, ci siano zeri. Cioè, AL TERMINE, nelle colonne dei PIVOTS voglio solo i PIVOTS e portare a zero gli altri coeff.

$$R_1 = R_1 + R_3 \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \overset{R_1 = R_1 - R_2}{\sim} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

qui ho finito, ho solo il PIVOT

abbiamo finito. Potevo anche dividere per i PIVOTS (che sono ≠0 per definizione) e trovare che, alla fine, saranno sempre 1

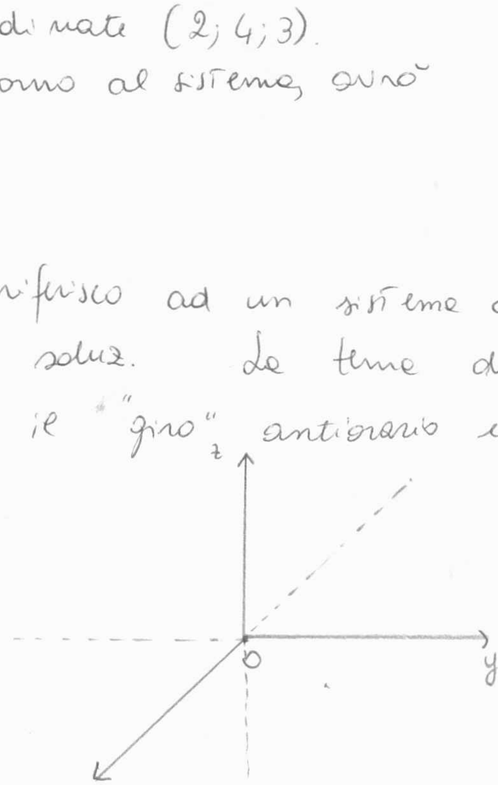
⇒ il punto trovato sarà, nell' ordine, di coordinate $(2; 4; 3)$.

Se torno al sistema, avrò

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases}$$

e questo è il punto soluz. del sistema DI COORDINATE $(2, 4, 3)$

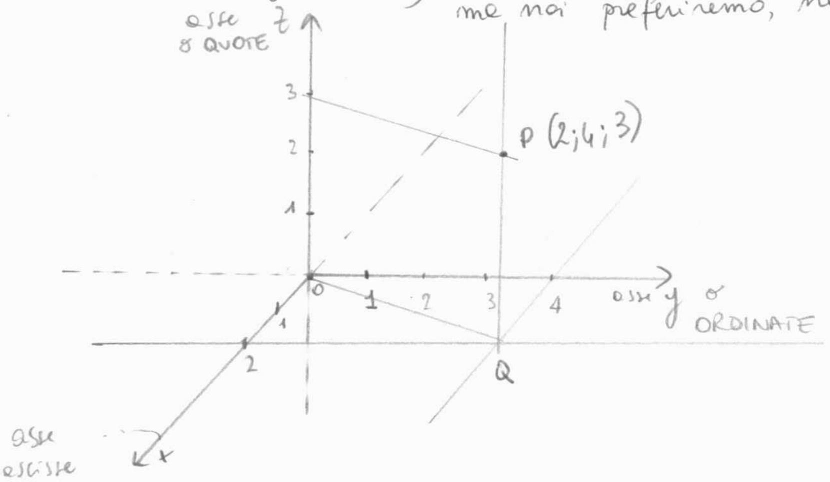
Se mi riferisco ad un sistema di assi cartes. ortogonali, posso disegnare le mie soluz. La terna delle coordinate è sempre DESTRORSA, quindi il "giro" antiorario è sempre positivo. L'origine è la terna $(0;0;0)$.



Per disegnare la terna ho bisogno di una UNITÀ di misura. Ogni asse corrisp. alla retta reale, e vanno all'∞.

le rette orientate corrispondono a $\mathbb{R}$ ⇒ ogni punto sulla retta corrisponde ad un $\# \in \mathbb{R}$.

Prendo un sist. di riferim. MONOMETRICO (stessa u.d. misura su tutti e 3 gli assi); ne esistono anche di DIMETRICI (2 u.d.m. ≠) O PIÙ ma noi preferiremo, nel nostro corso, i monom.



Io a partire dal punto 2 su x mando // alle ordinate. Poi faccio stessa cosa dall'altro punto, mandando // alle ascisse → trovo ∩ (= Q)

Ora da qst punto ∩ mando // all'asse z; e unisco l'origine O all'∩ che ho appena trovato e mando una // a questo segmento che passo per il punto 3 su z. : lì è il punto sol. del nostro sistema.

N.B. Nel caso di sistemi omogenei, è inutile lavorare con la matrice completa, perché comunque sono sempre 0 e rimangono 0 anche se vengono moltiplicati. PER ALTRI NUMERI O SOMMATI TRA LORO.

Parliamo più a fondo delle matrici. Esse non sempre sono associate ai sistemi, come le abbiamo usate finora. Ora noi lavoreremo con le matrici.

I numeri dati nelle matrici sono le ENTRATE delle MATRICI.

Il nome delle matrici si danno con lettere MAIUSCOLE dell'alfabeto latino. Per le entrate usiamo invece lettere minuscole: Noi non useremo tutte le lettere dell'alfabeto... perché potrei avere 30 entrate → non bastano più.

⇒ per le entrate usiamo 2 pedici: il I° → RIGA, il II° → COLONNA } del elemento.

Esempio:

$$A_{4\times5} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

elementi della I^a riga (il primo indice è sempre 1)

le mie entrate sono i miei "a"! Però spesso in matem. si cerca di COMPATTARE il tutto.

$$A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i = 1, \dots, 4 \;\to\; \text{righe} \\ j = 1, \dots, 5 \;\to\; \text{colonne}}}$$

oppure, ancora più velocemente,

$$A = \left(a_{ij}\right)_{4 \times 5}$$

Per esempio elemento a_{32} → è ALL'INCROCIO TRA 3ª riga, 2ª colonna

<u>DEFINIZIONE:</u> Se la matrice è quadrata (= stesso n° di righe e colonne)

⟹ le entrate della matrice in cui $i = j$ formano la <u>DIAGONALE PRINCIPALE</u> della matrice.

Se A è quadrata, gli elementi a_{ii} $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} \dots)$ formano la DIAGONALE PRINCIPALE della matrice.
(è come la diagonale di un quadrato)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

La diagonale secondaria, invece, è questa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Data una matrice A, io posso ricavare le <u>SOTTOMATRICI</u> della matrice.
Sono matrici di ordine < rispetto a quella data (cioè numero di righe e/o colonne inferiore a quelle date), con entrate prese dalla matrice principale (ma non prese a CASO!). Come si formano allora? TOGLIENDO RIGHE e/o COLONNE dalla matrice iniziale.
A partire da una matrice A, posso ottenere SOTTOMATRICI togliendo RIGHE e/o COLONNE da A. Posso togliere una riga, o una colonna, etc. per es.

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{1} & -1 & 3 \\ \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{2} & \cancel{0} \\ \cancel{1} & \cancel{0} & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

etc. Gli elementi rimangono così, non vanno sconvolti. ⟹

ho questa matrice; $\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.

ES: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 6\\ 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$ se voglio l'entrata cerchiata, tolgo le altre ^{2} righe e ^{3} colonne!

Si possono vedere ad es. quante sottomatrici quadrate $^{2\times 2}$ ci sono, etc.

Se voglio sottomatr. 3×3, nel matrice sopra ne ho 4. Perchè mi tengo le righe, (che sono già 3) e tolgo una colonna alla volta.

DEFINIZIONE

Data una matrice A generica $\underset{k\times n}{A} = (a_{ij})_{k\times n}$ (k righe, n colonne), posso determinare un'altra matrice $\underset{n\times k}{B}$ (n righe, k colonne) $= (b_{ji})$ dove $b_{ji} = a_{ij}$ $\forall i = 1, \dots, k$ e $\forall j = 1, \dots, n$

Tale matrice è detta la <u>TRASPOSTA</u> di A e si indica $A^T \left(= {}^T A = A^t = {}^t A = A'\right)$ ... ma noi useremo A^T.

<u>Esempio</u>.

$$\underset{3\times 2}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}_{3\times 2} \Rightarrow \underset{2\times 3}{A^T} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}$$

Le mie entrate sono quelle che avevo prima ma con gli indici scambiati. $\Rightarrow a_{11} \Rightarrow a_{11}$, $b_{12} = a_{21}$, $b_{13} \to \overset{\text{metto}}{a_{31}}$

Cioè si scambiano righe con colonne

DEFINIZIONE

Una matrice A, quadrata, si dice <u>simmetrica</u> se coincide con A^T. $\Rightarrow$ il nostro $b_{ji} = a_{ji} = b_{ij}$

~~Esempio~~ Rispetto alla diagon. principale, coincidono gli elementi che sono simmetrici rispetto alla diagonale

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3\\ -1 & 2 & -3\\ 2 & -3 & 3\end{pmatrix}_{3\times 3}$$

devono cioè avere gli stessi elementi, sopra e sotto la diagonale, disposti in modo simmetrico.

Una matrice quadrata A si dice DIAGONALE se ha elementi non nulli eventualmente solo sulla diagonale principale.

$\underbrace{\text{eventualmente}}_{\text{tutti gli altri elem. non sulla diagon sono nulli}}$

Esempio.

$$A_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{o anche} \quad B_{3\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono diagonali!

Una matrice NULLA ha tutte le entrate nulle ed è una matrice diagonale.

(CIOÈ: tutti gli elem. NON sulla diag. sono 0.)

La matrice $n\times n$, diagonale, con $a_{ii} = 1 \ \forall i = 1 \dots n$ è detta IDENTITÀ.

Esempio

perchè è un'identità, la chiamo "I"

$$I_{4\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sulla diagonale ho tutti 1, gli altri sono tutti 0.

Nelle matrici quadrate, ci sono anche le TRIANGOLARI.

Una matrice quadrata si dice TRIANGOLARE SUPERIORE se "al di sotto della diagonale principale ha solo zeri." Cioè, $a_{ij} = 0 \ \forall i > j$

[N.B. il quantificatore "quantifica" quello che dice dopo, cioè dice "per quanti" vale la caratteristica detta dopo: ABBIAMO il $\forall$ ("PER OGNI...") CHE È DETTO "QUANTIFICATORE UNIVERSALE" ed il secondo, che è invece il simbolo $\exists$, che dice "ESISTE ALMENO UN..." È DETTO QUANTIFICATORE ESISTENZIALE

Il simbolo $\exists!$ = "ESISTE UNO ED UNO SOLO"]

Ad es. qual è una triang. super? per esempio l'identità detta sopra.

Oppure,

$$A_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

i termini al di sotto della diag. principale sono nulli (e formano un triangolo! VISIVAMENTE PARLANDO) matrice nulla è $\begin{cases} \text{DIAGONALE} \\ \text{TRIANGOL. SUPER.} \\ \text{TRIANG. INFER.} \end{cases}$

matrice quadrata è detta <u>TRIANGOLARE INFERIORE</u> se $a_{ij} = 0 \ \forall i < j$

ESEMPIO :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$