13/04/11

$Q: V \to K$ è forma quadratica su un campo K se:

1) $Q(\alpha v) = \alpha^2 Q(v) \quad \forall \alpha \in K \quad \forall v \in V$

2) la forma $F: V \times V \to K$ così definita $F(v,w) = Q(v+w) - Q(v) - Q(w)$ è bilineare

(NB. F è simmetrica perché $F(w,v) = Q(w+v) - Q(w) - Q(v) = F(v,w)$)

Voglio definire una forma bilineare simmetrica dipendente da Q indicata con F_Q tale che $F_Q(v,v) = Q(v)$

Calcoliamo $F(v,v) = Q(2v) - Q(v) - Q(v) = 4Q(v) - 2Q(v) = 2Q(v)$

Allora basta prendere $F_Q(v,w) = \dfrac{F(v,w)}{2} = \dfrac{Q(v+w) - Q(v) - Q(v)}{2}$

F_Q è bilineare simmetrica e soddisfa $F_Q(v,v) = Q(v)$

La possibilità di avere tale F_Q è dunque legata alla possibilità di dividere per 2 cioè ad una nozione legata al campo che è quella di <u>caratteristica</u>

Si dice <u>caratteristica</u> di un campo K il più piccolo num. naturale p tale che $p \cdot x = 0 \ \forall x \in K$. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sono campi con caratteristica 0

Consideriamo ad esempio $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\} \to$ la caratteristica di $\mathbb{Z}_3$ è 3: infatti $3 \cdot 0 = 0$, $3 \cdot \bar{1} = \overline{3 \cdot 1} = \bar{3} = 0$, $3 \cdot \bar{2} = \overline{3 \cdot 2} = \bar{6} = 0$ classe

Nel campo con caratteristica p non ha senso la divisione per p allora se lavoriamo in un campo con caratteristica 2 ad esempio $\mathbb{Z}_2$ non possiamo dividere per 2 e quindi non riusciamo a trovare F_Q. Per continuare questa teoria delle forme quadratiche dobbiamo supporre di lavorare in un campo con caratteristica $\neq 2$

In tali campi (come $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) esiste la forma $F_Q(v,w) = \frac{Q(v+w) - Q(v) - Q(w)}{2}$ bilineare simmetrica ed è detta forma POLARE di Q

Essa è unica: infatti supponiamo esista un'altra forma bilineare simmetrica $\tilde{F}$ tale che $\tilde{F}(v,v) = Q(v)$ allora voglio dimostrare che $\tilde{F} = F_Q$

$$Q(v+w) = \tilde{F}(v+w, v+w) = \tilde{F}(v, v+w) + F(w, v+w) = \tilde{F}(v,v) + \tilde{F}(v,w) + \tilde{F}(w,v) + F(w,w) = Q(v) + 2\tilde{F}(v,w) + Q(w) \rightarrow F(v,w) = \frac{Q(v+w) - Q(v) - Q(w)}{2} = F_Q(v,w)$$

Supponiamo ora di partire da una forma bilineare simmetrica $F: V \times V \rightarrow K$ e costruiamo la forma $Q: V \rightarrow K$, $v \mapsto Q(v) = F(v,v)$

Questa forma così costruita è una forma quadratica infatti

$$Q(\alpha v) = F(\alpha v, \alpha v) \overset{\text{Per bilinearità di } F}{=} \alpha(F(v, \alpha v)) = \alpha^2 F(v,v) = \alpha^2 Q(v) \quad \forall \alpha \in K \text{ e } v \in V$$

la forma $F_1(v,w) = Q(v+w) - Q(v) - Q(w)$ $V \times V \rightarrow K$ è bilineare

VEDIAMO SULLA PRIMA COMPONENTE LA LINEARITÀ

cioè sulla prima componente: 1) $F_1(v_1+v_2, w) = F_1(v_1, w) + F_1(v_2, w)$ e

2) $F_1(\alpha v, w) = \alpha F_1(v,w)$:

1) $$F_1(v_1+v_2, w) = Q(v_1+v_2+w) - Q(v_1+v_2) - Q(w) = F(v_1+v_2+w, v_1+v_2+w) - F(v_1+v_2, v_1+v_2) - F(w,w) \; *$$

$$F_1(v_1,w) + F_1(v_2,w) = Q(v+w) - Q(v_1) - Q(w) + Q(v_2+w) - Q(v_2+w) - Q(v_2) - Q(w) = F(v_1+w, v_1+w) - F(v_1,v_1) - F(w,w) + F(v_2+w, v_2+w) - F(v_2,v_2) - F(w,w)$$

$$* \; F(v_1+w, v_1+w) + \cancel{F(v_2,v_1)} + \cancel{F(v_2,v_2)} + F(v_2,w) + F(v_1,v_2) + F(w_1,v_2) - \cancel{F(v_2,v_1)} - \cancel{F(v_2,v_1)}$$

$$- \; - \cancel{F(v_2,v_2)} - F(w,w)$$

2)

Ora dimostro che $F_1(\alpha v, w) = \alpha F_1(v,w)$

$$F_1(\alpha v, w) = Q(\alpha v + w) - Q(\alpha v) - Q w = F(\alpha v + w, \alpha v + w) - F(\alpha v, \alpha v) - F(w,w)$$

$$\alpha F_1(v,w) = \alpha\big(Q(v+w) - Q(v) - Q(w)\big) = \alpha\big(F(v+w, v+w) - F(v,v) - F(w,w)\big)$$

$$\alpha^2 \cancel{F(v,v)} + 2\alpha F(v,w) + \cancel{F(w,w)} - \cancel{\alpha^2 F(v,v)} - \cancel{F(w,w)} = \alpha\big(\cancel{F(v,v)} + 2F(v,w) + \cancel{F(w,w)} - \cancel{F(v,v)} - \cancel{F(w,w)}\big)$$

c.v.d.

Fare la dimostrazione della linearità nella seconda componente di F_1

Conclusione: F_1 è forma bilineare $\Rightarrow$ Q è forma quadratica.

Nei campi K con caratteristica $\neq 2$ (Char $K \neq 2$) Esiste una corrispondenza biunivoca $\varphi: \mathrm{Bil\,simm}(V) \rightarrow \mathrm{Quad}(V)$ cioè

Tra le forme bilineari simmetriche e le forme quadratiche così fatta: $\varphi(F) = Q \mid Q(v) = F(v,v)$ mentre $\varphi^{-1} Q = F_Q$

Possiamo dunque ridefinire per le forme quadratiche le varie definizioni date per le forme bilineari simmetriche

Inoltre fissata una base B in V possiamo associare una matrice ad una forma quadratica Q: la ~~ma~~ matrice, nella base data, della sua polare: cioè $[Q]_B = [F_Q]_B$; possiamo scrivere la forma quadratica in forma matriciale in questo modo

$\rightarrow$ posto $[v]_B = X$ $\quad [w]_B = Y$ $\quad A = [F]_B$ $\rightarrow$ $F(v,w) = X^T A Y \rightarrow Q(v) = F(v,v) = X^T A X$

Esempio

Forma quadratica

$Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x\,y\,z) \longmapsto x^2 + yz - 3xy - 2z^2$

$F_Q : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ CON $F_Q(v, w) = Q(v+w) - Q(v) - Q(w)$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \longmapsto$

$$F_Q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}(x_1+x_2)^2 + (y_1+y_2)\cdot(z_1+z_2) - 3(x_1+x_2)(y_1+y_2) - 2(z_1+z_2)^2 - x_1^2 - y_1z_1 + 3x_1y_1 + 2z_1^2 + x_2^2 - y_2z_2 + 3x_2y_2 + 2z_2^2$$

$$[F_Q]_C = [Q]_C = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

POSTA C LA BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^3$