Spazio euclideo è uno spazio vettoriale reale con una forma bilineare simmetrica definita positiva

1

AD ESEMPIO POSSIAMO RENDERE $\mathbb{R}^4$ UNO SPAZIO EUCLIDEO INTRODUCENDO IN $\mathbb{R}^4$, LA FORMA BILINEARE $X \cdot Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 \Rightarrow$ O EQUIVALENTEMENTE LA FORMA QUADRATICA:

$$\Rightarrow Q(x) = X \cdot X = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 .$$

Se invece mettiamo:

$\mathbb{R}^4$ con la forma quadratica $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c x_4^2$ $c > 0$ velocità della luce

forma quadratica di MINKOWSKY: non definita positiva

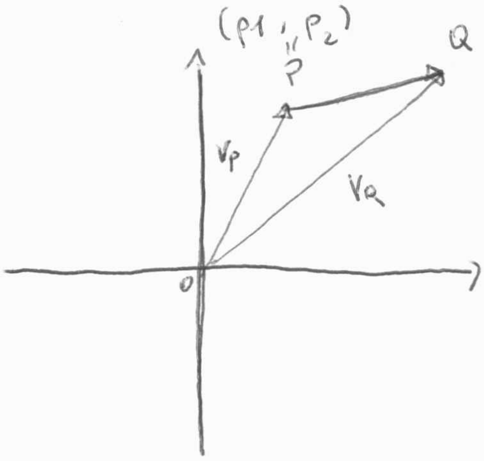
$\exists$ vettori di $\mathbb{R}^4$ / $Q(x) > 0$, vettori x / $Q(x) < 0$, vettori x / $Q(x) = 0$

$Q(x) > 0$: vettori spazio; $Q(x) < 0$: vettori tempo; $Q(x) = 0$: vettori luce

DEFINIZIONE:

In $\mathbb{R}^n$ euclideo la distanza fra due punti P, Q,

$$d(P,Q) = \| V_Q - V_P \| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + \dots + (q_n - p_n)^2}$$



Vediamo il teorema (Disuguaglianza) di Cauchy - Shwartz:

dati due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$ euclideo $\Rightarrow |x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$

Dimostrazione:

$\boxed{1^\circ \text{ caso}}$ x e y sono lin. dipendenti cioè $y = \alpha x$ $\longrightarrow$

$|x\cdot y| = |x\cdot(\alpha x)| = |\alpha||x\cdot x| = |\alpha|\cdot\|x\|^2 =$

esprime la forma bilineare

$= |\alpha|\|x\|\cdot\|x\| = \|\alpha x\|\cdot\|x\| = \|y\|\cdot\|x\|$

$\boxed{2^\circ \text{ caso}}$ x e y sono lin. indipendenti $\Rightarrow$ considero $V \stackrel{?}{=} \langle\langle x, y\rangle\rangle$

con base $B = \{x, y\} \Rightarrow [x\cdot y]_B = \begin{pmatrix} x\cdot x & x\cdot y \\ y\cdot x & y\cdot y \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ essendo $x\cdot y$ una forma bilineare definita positiva

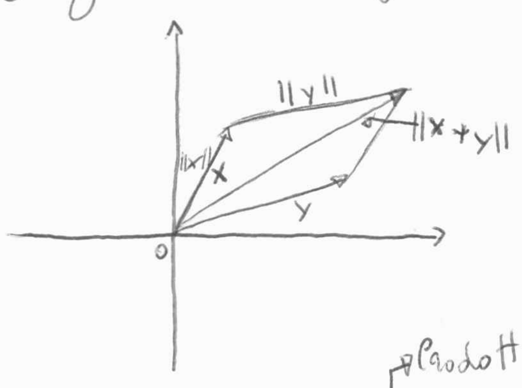
per Jacoby, $\begin{vmatrix} x\cdot x & x\cdot y \\ x\cdot y & y\cdot y \end{vmatrix} > 0$

$(x\cdot x)(y\cdot y) - (x\cdot y)^2 > 0 \Rightarrow \|x\|^2\cdot\|y\|^2 > (x\cdot y)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|x\|\cdot\|y\| > |x\cdot y|$

c.v.d..

Disuguaglianza triangolare $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$



$\|x+y\|^2 = (x+y)\cdot(x+y) = x\cdot x + x\cdot y + y\cdot x + y\cdot y =$

prodotto scalare

è una forma bilineare

$= \|x\|^2 + 2x\cdot y + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + \underbrace{2\|x\|\cdot\|y\|} + \|y\|^2 = \longrightarrow$

per disuguaglianza di Cauchy - Shwartz

$$= (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

c. v. d.

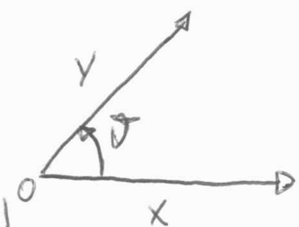
Teorema di Pitagora Se x e y sono vettori ortogonali (relativamente al prodotto scalare) $\Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Infatti x ortogonale ad y significa $x \cdot y = 0$

$$\Rightarrow \|x+y\|^2 = (x+y)\cdot(x+y) = \|x\|^2 + 2xy + \|y\|^2 =$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2$$ c. v. d.

Vogliamo misurare l'angolo tra due vettori:



(consideriamo la parte convessa dell'angolo)

$\Rightarrow$ la disuguaglianza di Cauchy - Shwartz ci dice che

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\| \Rightarrow \frac{|x \cdot y|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1 \Rightarrow \text{definisco } \cos\vartheta = \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|} \Rightarrow$$

sono numeri reali COMPRESI TRA -1 E +1.

$\Rightarrow$ POSSIAMO VEDERE IL PRODOTTO SCALARE COME:

$$x \cdot y = \cos\vartheta \, \|x\| \cdot \|y\|$$

Se x e y sono ortogonali $\Rightarrow x \cdot y = 0 \Rightarrow \cos\vartheta = 0 \Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{2}$

DEFINIZIONE DI PERPENDICOLARITÀ

$\Rightarrow$ Definiamo x perpendicolare ad y e scriviamo $x \perp y$ se l'angolo convesso tra x e y è $\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Due vettori sono ortogonali $\Leftrightarrow$ sono perpendicolari.

Una base ortonormale in $\mathbb{R}^n$ euclideo è costituita da n vettori ortogonali a 2 a 2 e di norma unitaria:

$B_\perp$ è base ortogonale, $B_{\perp n}$ è base ortonormale.

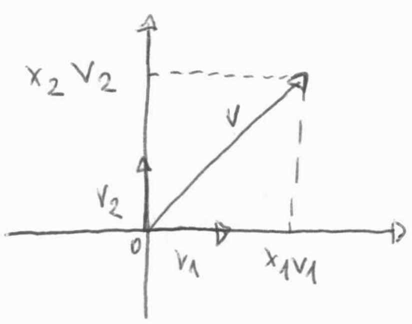
Data una base $B_{\perp n}$ di $\mathbb{R}^n$, $B_{\perp n} = \{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ se $v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$: vediamo il significato dei coefficienti x_i.

Se considero $v \cdot v_j = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) \cdot v_j = x_1 v_1 \cdot v_j + x_2 v_2 \cdot v_j + \dots$

$+ x_n v_n \cdot v_j \Rightarrow$ essendo $v_i \cdot v_j = 0 \quad \forall i \neq j$ e

$v_j \cdot v_j = 1$ (essendo preso $B_{\perp n}$) $\Rightarrow v \cdot v_j = x_j$



Se la base è "solo" ortogonale, $B_\perp \Rightarrow v \cdot v_j = x_j v_j \cdot v_j =$

$= x_j \|v_j\|^2 \Rightarrow x_j = \dfrac{v \cdot v_j}{\|v_j\|^2}$ sono chiamati coefficienti di FOURIER

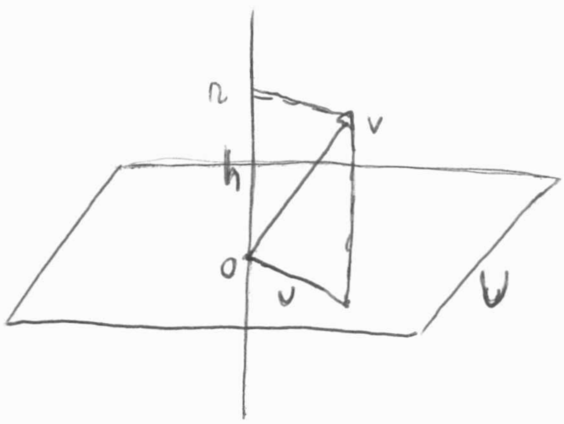
Ricordo che dato $U < V$, $U^\perp = \{v \in V \,/\, F(u, v) = 0 \ \forall u \in U\}$, F forma bilineare simmetrica

Se F è definita positiva $\Rightarrow \nexists$ vettori isotropi non nulli perché $F((v,v)) > 0 \quad \forall v \neq 0$

$\Rightarrow V = U \oplus U^\perp$

In uno spazio euclideo, dato $U < \mathbb{R}^n$, possiamo sempre decomporre $\mathbb{R}^n$ come $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp \Rightarrow$ ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$ si può scrivere come $v = u + h$ con $u \in U$ ed $h \in U^\perp$: u è detta

<u>PROIEZIONE ORTOGONALE</u> di V su U, h è la proiezione ortogonale di V su $U^\perp$



$r \perp U$
$r = U^\perp$

Vogliamo ora determinare u ed h tale che $v = u + h$, cioè determinare la proiezione ortogonale di un vettore v su U

Sono dati $v \in \mathbb{R}^n$ e $U < \mathbb{R}^n$ con base $B_U = \{u_1, \dots, u_k\}$

$\Rightarrow v = u + h$ con $u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k$ ed $h \in U^\perp$

$$h = v - u \quad \Rightarrow \begin{cases} h \cdot u_1 = 0 \\ h \cdot u_2 = 0 \\ \vdots \\ h \cdot u_k = 0 \end{cases} \longrightarrow$$

$$\begin{cases} (v-(a_1u_1+a_2u_2+\dots+a_Ku_K))\cdot u_1 = 0 \\ (v-(a_1u_1+\dots\dots+a_Ku_K))\cdot u_2 = 0 \\ \vdots \\ (v-(a_1u_1+\dots\dots+a_Ku_K))\cdot u_K = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v\cdot u_1 - a_1u_1\cdot u_1 - \dots\dots - a_Ku_K\cdot u_1 = 0 \\ \vdots \\ v\cdot u_K - a_1u_K\cdot u_K - \dots\dots - a_Ku_K\cdot u_K = 0 \end{cases}$$

La matrice completa del sistema è:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} u_1\cdot u_1 & u_2\cdot u_1 & \dots & u_Ku_1 & v\cdot u_1 \\ u_1\cdot u_2 & u_2\cdot u_2 & & u_Ku_2 & v\cdot u_2 \\ \vdots & \vdots & & & \\ u_1\cdot u_K & u_2\cdot u_K & & u_Ku_K & v\cdot u_K \end{array}\right)_{K\times(K+1)}$$

La matrice dei coefficienti è $[(x\cdot y)|_U]_{B_U}$ $\Rightarrow$ essendo $x\cdot y$ definito positivo $\det[(x\cdot y)|_U]_{B_U} > 0$ $\Rightarrow$ i due ranghi coincidono (sono entrambi K) e il sistema ha soluzione PER IL TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI

LA SOLUZIONE DEL SISTEMA DÀ LE COORDINATE $(a_1,\dots,a_K)$ DELLA PROIEZIONE ORTOGONALE u DEL VETTORE v, SU U, VISTO COME VETTORE DI U.