FORME BILINEARI SIMMETRICHE

$F: V \times V \to \mathbb{R}$ BILINEARE, è simmetrica se solo se:

$$F((v,w)) = F((w,v)) \quad \forall v, w \in V$$

DEFINIZIONE: Due vettori si dicono F-coniugati se solo se $F((v,w)) = 0$

Fissato un vettore $v \in V$ possiamo considerare un'insieme di tutti i vettori di V F-coniugati a tale vettore; tale insieme è $v^\perp$, così definito:

$$v^\perp = \{ w \in V \text{ tale che } F((v,w)) = 0 \}$$

e si legge " v ortogonale" poiché tali w sono anche detti " F-ortogonali a v".

Se $W \subset V \Rightarrow$ possiamo cercare $W^\perp = \{ v \in V$ tale che $F((v,w)) = 0 \quad \forall w \in W \}$.

Se $W \leq V$ (W sottospazio di V) allora fissata una base di W, $B = \{w_1, \dots, w_k\}$, ogni vettore w di W si scrive come combinazione lineare dei vettori di B.

$$\Rightarrow w = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_k w_k \qquad a_j \in \mathbb{R} \quad \forall j = 1, \dots, k$$

quindi se cerco i $v \in V$ tale che $F((v,w)) = 0 \quad \forall w \in W$, allora possiamo scrivere:

$$F((v,w)) = F((v, a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_k w_k)) =$$

$$= a_1 F((v_1, w_1)) + a_2 F((v_1, w_2)) + \dots + a_k F((v_1, w_k)) =$$

$$= 0$$

Basta cercare i $v \in V$ tale che $F((v, w_j)) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k$

Infatti se $v \in V$ è tale che $F((v, w_j)) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k$

$\Rightarrow \forall w \in W, \ F((v,w)) = 0$

Viceversa se v è tale che $F((v,w)) = 0 \quad \forall w \in W$

$\Rightarrow$ anche $F((v, w_j)) = 0 \quad \forall w_j, j = 1, \dots, k$, elementi della base B

Es:

$V = \mathbb{R}^2 \qquad F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right) \longmapsto x_1 y_2 + x_2 y_1$$

è una forma bilineare?

Sì, perché è un polinomio omogeneo di grado due.

Per dimostrarlo SECONDO LA DEFINIZIONE

1) $F((v_1 + v_2, w)) = F((v_1, w)) + F((v_2, w)) \Rightarrow F\left(\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\hat{x}_1\\\hat{x}_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)\right) =$

$$= F\left(\left(\begin{pmatrix}x_1 + \hat{x}_1\\x_2 + \hat{x}_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)\right) =$$

$$= (x_1 + \hat{x}_1) y_2 + (x_2 + \hat{x}_2) y_1$$

$$F\left(\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)\right) + F\left(\left(\begin{pmatrix}\hat{x}_1\\\hat{x}_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)\right) = x_1 y_2 + x_2 y_1 + \hat{x}_1 y_2 + \hat{x}_2 y_1$$

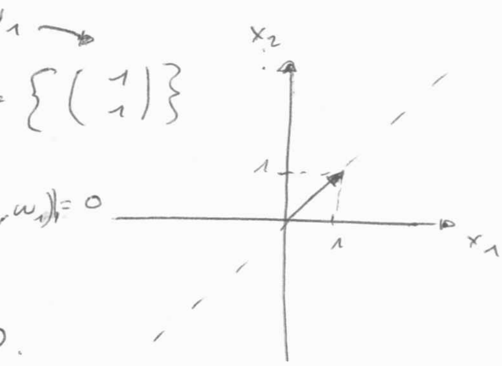
SONO UGUALI

ANALOGAMENTE PER LE ALTRE PROPRIETÀ $\Rightarrow$ F È BILINEARE

È simmetrica? $F\left(\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)\right) = x_1 y_2 + x_2 y_1$ MENTRE

$F\left(\left(\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)\right) = y_1 x_2 + y_2 x_1 \Rightarrow$ sono uguali e quindi la forma bilineare è simmetrica.

Sia $W \leq \mathbb{R}^2$ dato dall'equazione $x_1 - x_2 = 0$ cerco $W^\perp$ cioè l'insieme dei vettori F-coniugati ai vettori di W.



Prendiamo una base di W, $B_W = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$

Cerco i vettori $v = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ tale che $F((v, w_1)) = 0$

cioè $F\left(\left(\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)\right) = y_1 + y_2 \leftarrow$ la impongo uguale a 0.

$$W^\perp = \{(y_1, y_2) \text{ tale che } x_1 = -y_2\}$$

Dato un sottospazio $W \leq V$ e $F: V \times V \to \mathbb{R}$ bilineare e simmetrica $\Rightarrow W^\perp$ è sottospazio di V?

Vediamo se lo è;

$\vec{0} \in W^{\perp}$? (cioè $F((\vec{0}, w)) = 0 \quad \forall\, w \in W$?)

Sì, sempre vero.

Se $v_1, v_2 \in W^{\perp} \Rightarrow v_1 + v_2 \in W^{\perp}$ e se $a \in \mathbb{R} \Rightarrow a v_1 \in W^{\perp}$

voglio dimostrare che $F((v_1 + v_2, w)) = 0 \quad \forall\, w \in W$

ma $F((v_1 + v_2, w)) = F((v_1, w)) + F((v_2, w)) = 0 + 0 = 0$

$\uparrow$ X LA BILINEARITÀ

$$F((a v_1, w)) = a F((v_1, w)) = a \cdot 0 = 0$$

Quindi la risposta è sì, $W^{\perp}$ è sottospazio di V.

DEFINIZIONE: Data $F : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilineare simmetrica

$\Rightarrow v \in V - \{0\}$ è detto F-ISOTROPO se solo se $F((v, v)) = 0$

(SI PRENDE $v \neq 0$, perché $F((0, 0))$ è sempre 0)

Per $F\left(\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)\right) = x_1 y_2 + x_2 y_1 \Rightarrow \exists$ vettori F-isotropi?

$$F\left(\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)\right) = x_1 x_2 + x_2 x_1 = 2 x_1 x_2$$

$$\downarrow$$

$$2 x_1 x_2 = 0$$

$\Rightarrow x_1 x_2 = 0$ per tutti i vettori di coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}, x_2 \in \mathbb{R}$

e per i vettori di coordinate $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbb{R}$;

cioè i vettori che appartengono alla retta di equazione $x_1 = 0$ e alla retta di equazione $x_2 = 0$

(Tutti questi vettori sono isotropi).

DEFINIZIONE: Una forma bilineare simmetrica

è DEFINITA POSITIVA se $F((v, v)) > 0 \quad \forall\, v \neq 0$.

è SEMIDEFINITA POSITIVA se $F((v, v)) \geq 0 \quad \forall\, v \in V$;

è definita NEGATIVA se $F((v, v)) < 0 \ \forall v \neq 0$;
è semidefinita NEGATIVA se $F((v, v)) \leq 0 \ \forall v \in V$;
mentre è INDEFINITA negli altri casi.
(quella che abbiamo studiato in ~~prec~~ precedenza è indefinita).

FORMA QUADRATICA

DEFINIZIONE: Si dice forma quadratica una applicazione $Q : V \to K$ (V spazio vettoriale su K) tale che:

1) $Q(\alpha v) = \alpha^2 Q(v) \quad \forall v \in V \text{ e } \forall \alpha \in K$

2) posso definire $F((v, w)) = Q(v+w) - Q(v) - Q(w)$

$F : V \times V \to K$ con F forma bilineare.

A partire da una forma bilineare simmetrica posso costruire una forma quadratica in questo modo:
data la mia $F : V \times V \to K$ allora costruisco

$$(v, w) \mapsto F((v, w))$$

$$Q : V \to K$$
$$v \mapsto Q(v) = F((v, v))$$

$$\Longrightarrow Q(\alpha v) = F((\alpha v, \alpha v)) = \alpha^2 F((v, v)) = \alpha^2 Q(v)$$

~~Vediamo se $F((v, w)) = Q(v+w) - Q(v) - Q(w)$ è forma bilineare:~~

~~$F((v_1 + v_2, w)) = Q(v_1 + v_2 + w) - Q(v_1 + v_2) - Q(w)$~~

~~$F((v_1, w)) + F((v_2, w)) = Q(v_1 + w) - Q(v_1) - Q(w) + Q(v_2 + w) - Q(v_2) - Q(w)$~~