10.11.2010

Considero una matrice quadrata $A \in M_{n \times n}$, si dice INVERTIBILE se esiste una matrice indicata con A^{-1} tale che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ (matrice identità). A^{-1} è detta inversa di A.

L'elemento neutro (della moltiplicazione tra matrici) è I, che è la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Infatti

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

la matrice identità commuta sempre NEL PRODOTTO FRA MATRICI QUADRATE.

Esiste sempre?

Nei num. reali solo 0 non ha l'inverso. Non tutte le matrici hanno un'inversa. Se esiste A^{-1}, allora si avrà $A \cdot A^{-1} = I$. Se calcolo il det $|A \cdot A^{-1}|$ questo sarà uguale a $|I|$. Per Binét avrò $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$

ottenuto dal prodotto degli elementi della diagonale principale.

Avrò: $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ - Perciò $|A|$ deve essere diverso da ZERO.

$|A|$ deve essere $\neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ esiste.

PROPOSIZIONE:

Una matrice è invertibile se e soltanto se il suo determinante è $\neq 0$, (oppure ANALOGAMENTE ~~se ho~~ rango massimo.)

QUINDI:

$A \in M_{n \times n}$ è invertibile $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow rg\,A$ è massimo cioè $rg\,A = n$

se e soltanto se

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE

INOLTRE: $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

ci sono due modi per trovare l'inversa. Uno sfrutta Gauss, CIOÈ LA RIDUZIONE A GRADINI DELLA MATRICE CON LE OPERAZIONI ELEMENTARI RIGA, L'ALTRO I MINORI DELLA MATRICE STESSA

CONSIDERAZIONI SULLE OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE MATRICI

1) data una matrice $A \in M_{k \times n}$ e detta $e(A)$ una operazione elementare sulle righe di A (scambio righe, moltiplicazione per scalare...) Allora si dimostra che

$$e(A) = [e(I_k)] \cdot A$$

la matrice su cui abbiamo applicato op. elementare

matrice identità su cui abbiamo applicato l'operazione elementare moltiplicata per A.

Verifichiamo con $A \in M_{2 \times 2}$ per semplificare la spiegazione:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

a) SCAMBIO RIGHE $\Rightarrow$ $e(A) = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$

$$\underbrace{e(I)}_{\substack{\text{scambio di righe} \\ \text{sulla matrice} \\ \text{identità}}} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

stessa matrice

b) MOLTIPLICAZIONE RIGA X SCALARE

$$e(A) = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$e(I) \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{pmatrix}$$

moltiplico la 1^a riga di I per λ

stessa matrice

c) SOMMA DI DUE RIGHE

$$e(A) = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$e(I) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$$

somma di due righe, dove I sta per $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

stessa matrice

QUINDI $\quad e(A) = [e(I)] \cdot A$

Ciò vale per tutte le matrici

Si dimostra che se faccio più operazioni elementari su A, ciò equivale a fare altrettante op. elementari su I e poi moltiplicarla · A:

PROPOSIZIONE

Dette $e_1, e_2, \dots, e_k$ K operazioni elementari, allora

$$e_k(e_{k-1}(e_{k-2}\cdots(e_1(A))\dots)) =$$

$$= [e_k(e_{k-1}(e_{k-2}\cdots(e_1(I))\dots))] \cdot A$$

non si tratta di prodotto. Significa applicare un'op. elementare su A oppure su I e poi applicare sulla nuova matrice ottenuta una nuova operazione elementare e così via... Si può vedere come funzione composta. L'unico prodotto è la moltiplicazione per A.

DIMOSTRAZIONE

Si dimostra per induzione.

Il procedimento di dimostrazione può essere:

a. DIRETTO $Ip \to Ts$, sfruttando diversi teoremi, DEFINIZIONI, RAGIONAMENTI LOGICI, etc...

b. ASSURDO si nega la tesi, e poi per via diretta si arriva a contraddire l'ipotesi

c. per INDUZIONE si usa per dimostrare le proposizioni che interessano solo i numeri NATURALI ($\mathbb{N}$). Questa dimostrazione parte dal ASSIOMA DI PEANO, il quale definisce l'insieme dei numeri naturali in modo ASSIOMATICO ED esauriente. (esiste sempre un numero che succede un altro; per 0 non esiste il precedente, se un sottoinsieme contiene un elemento e il suo successivo, allora questo sottoinsieme coincide con $\mathbb{N}$...)

CONSTA DI DUE PARTI

1) VERIFICA nel caso n = più piccolo naturale possibile

2) DIMOSTRAZIONE

Considero il sottoinsieme dei numeri naturali FORMATO DAI NATURALI che VERIFICANO la proposizione:

$$A = \{ n \in \mathbb{N} \mid p(n) \text{ è vera} \}, \text{ con } 0 \in A$$; SE 0 NON PUÒ

1) VERIFICARE LA PROPOSIZIONE, ALLORA prendo la n più piccola, cioè $n=1$, o $n=2$ etc... E VERIFICO LA PROPOSIZIONE PER QUEL n. AD ESEMPIO PER LA PROPOSIZIONE ⊛ DA DIM.

PRENDO $n=1$: $e_1(A) = e_1(I) \cdot A$

e l'abbiamo GIÀ dimostrato prima.

2) Suppongo che fino ad un certo k, $p(k)$ sia vera. (ipotesi assunta per induzione) E DIMOSTRO LA PROPOSIZIONE PER $n = k+1$.

COSÌ PER ⊛
Prendo la $(k+1)$esima op. elementare. $p(k+1)$ è ancora vero?

So quindi che è VERA:

$$e_k(e_{k-1}(e_{k-2} \dots (e_1(A)) \dots)) =$$
$$= e_k(e_{k-1}(e_{k-2} \dots (e_1(I) \dots)) \cdot A$$

ma devo dimostrare che è vera anche

$$e_{k+1}(e_k(e_{k-1} \dots (e_1(A)) \dots)) =$$
$$= e_{k+1}[(e_k(e_{k-1} \dots (e_1(I)) \dots)) \; A]$$

A ritroso scrivo:

$$e_{k+1}(\dots \quad e_3(e_2(e_1(I) \cdot A))$$

$$= e_{k+1}(I) e_k(I) \dots e_4(I) \cdot e_3(I) \cdot \underbrace{e_2(I) \cdot e_1(I)}_{e_2(e_1(I))} \dots \quad \cdot A$$

$$e_3(e_2(e_1(I)))$$

$$e_4(e_3(e_2(e_1(I))))$$

e diventa

$$= [e_{k+1}(e_k(\dots (e_1(I))] \cdot A \quad \Rightarrow \text{c.v.d.}$$

⇒ PER LA DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE LA PROPOSIZIONE È VERA PER OGNI NATURALE.

OSSERVAZIONE

Se ho una matrice quadrata A invertibile, allora la sua forma a gradini canonica è sempre I, cioè le matrici invertibili sono equivalenti ad I

Cioè se so che A è invertibile, applicando un certo numero di op. elementari otterrò sempre I.

QUINDI AVREMO

$e_{k+1}(e_k \cdots (e_1(A))\dots) = I$, e allora, PER QUANTO DIMOSTRATO $\Rightarrow$

$$[e_{k+1}(e_k(\dots(e_1(I))\dots))] \cdot A = I$$

ciò significa che

$$e_{k+1}(e_k(\dots(e_1(I))\dots)) = A^{-1}$$

le operazioni el. fatte su A (PER RIDURLA ALLA MATRICE IDENTITÀ), se riapplicate ad I mi fanno ottenere la matrice inversa.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & I \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & & a_{2n} & & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \\ a_{n1} & & a_{nn} & & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{c|c} I & A^{-1} \end{array}\right)$$

esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

det $\neq 0$

$\Downarrow$

è invertibile

le aggiungo la matrice identità per trovare A^{-1} e applicare ad entrambe le stesse operazioni elementari per evitare di ripeterle ~~più~~ separatamente per due matrici. Faccio le operazioni elementari fin quando ottengo I.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

il tratteggio ci ricorda che sono 2 matrici assieme.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{3R_1 - R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \overset{R_1 - R_2}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \overset{\frac{R_2}{2}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

sono arrivato all'identità

e la MATRICE INVERSA

Oppure, si può calcolare l'inversa anche con un altro metodo
Data A quadrata invertibile costruiamo la sua <u>AGGIUNTA</u>
(è una matrice quadrata dello stesso ordine di A). L'aggiunta è indicata con A^*.

$$\text{Se} \quad A \in M_{n\times n} \Rightarrow A^* \in M_{n\times n}$$

A^* è così fatta: $\quad a^*_{ij} = (-1)^{i+j} \left| \hat{A}_{ij} \right|$

<u>complemento algebrico di a_{ij}</u>

<u>esempio</u>:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \boxed{4} \end{pmatrix}$$

$$a^*_{11} = (-1)^{1+1}(4) = \underline{\underline{4}}$$

A^* è la matrice dei complementi algebrici.

Quindi $\quad A^{-1} = \dfrac{(A^*)^T}{|A|}$

Se l'inversa esiste, È UNICA.