10 Gennaio 2011 lunedì

Parlavamo di geometria analitica: nel piano → rette, fascio di rette. Manca il fascio di piani.
Vediamo cos'è.

Diciamo FASCIO DI PIANI nello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$ una combinazione lineare di due piani $\bar{\pi}_1$ e $\bar{\pi}_2$.
Cioè, se abbiamo l' eq. dei due piani:

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_1 &: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \bar{\pi}_2 &: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{aligned}$$ eq. cartesiane di piani in $\mathbb{R}^3$

⇒ l'equaz. del fascio è $\lambda(a_1x+b_1y+c_1z+d_1) + \mu(a_2x+b_2y+c_2z+d_2) = 0$
una combin. lin. dei 2 piani dati. Questa equaz. rappresenta ∞ piani al variare di λ e μ. IN $\mathbb{R}$.

Come sono messi i piani DEL FASCIO in $\mathbb{R}^3$? Dipende dai 2 PIANI BASE nello spazio, $\bar{\pi}_1$ e $\bar{\pi}_2$. Se essi sono l.i., ⇒ le soluz. comuni ai 2 piani, cioè tutti quei punti che annullano entrambe le equaz ⇒ annullano tutte le equaz. del fascio ⇒ sono punti che appartengono a tutti gli ∞ piani.

Se $\bar{\pi}_1$ e $\bar{\pi}_2$ sono lin. indip. ⇒ se considero $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$

Noi cerchiamo lo spazio soluz. di qst sistema. Sarà una retta.
INFATTI:
Studiamo il rg (abbiamo 2 equaz. in 3 incognite);
Se sono lin. indip., considerando le matrici incompleta (A) e completa $(A \vdots B)$ ⇒ avremo che il $rg(A) = 2$ ⇒ anche $rg(A \vdots B) = 2$ per Rouché-Capelli, il sistema ha soluzione: una retta.

⇒ $Sol(\Sigma)$ è uno spazio affine 1-dimens. (rette in $\mathbb{R}^3$ non passante per l' origine).

②

DUNQUE Tutti i piani del fascio si intersecano in una retta comune, detta <u>ASSE del FASCIO</u>.

Possiamo immaginare i piani come le pagine di un libro, dove la costa del volume rappresenta l' asse del fascio.

Questo se $\bar{u}_1$ e $\bar{u}_2$ sono lin. indip.

Nel caso in cui le equazioni di $\bar{u}_1$ e $\bar{u}_2$ non siano linearm. indipendenti; ⇒ , se $rg(A) = 1$ e $rg(A:B) = 1$,

⇒ i due piani coincidono, perchè sono in $\mathbb{R}^3$, lo spaz. sol. ha dimens. 2 → le due equaz. danno lo stesso piano.

Se moltiplico l' equaz. per un parametro, comunque geometricam. non cambierà nulla per il piano resta lo stesso.

⇒ I due piani o coincidono (se $rg(A) = rg(A;B) = 1$) e quindi il fascio è dato da un unico piano (geometricam. parlando), altrimenti, se $rg(A) = 1$ e $rg(A;B) = 2$,

Rouché - Capelli dice che il sistema non ha soluzione ⇒

I due piani sono // ⇒ $\bar{u}_1 \parallel \bar{u}_2$ e quindi, al variare dei parametri, tutti i piani del fascio saranno // tra loro.

Se i piani del fascio si incontrano in una retta (asse del fascio) avremo un FASCIO PROPRIO DI PIANI.

Se i due piani del fascio sono //, avremo un FASCIO IMPROPRIO DI PIANI.

Se vogliamo lavorare col fascio conviene ridurci ad un parametro solo. λ e μ non saranno nulli contemporaneamente, altrimenti avremo $0 = 0$.

⇒ Almeno 1 sarà $\neq 0$ ⇒ se $\lambda \neq 0$, posso dividere per λ e ottengo $(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \frac{\mu}{\lambda}(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$

Supponendo $\lambda \neq 0$, dividiamo l' equazione del fascio per λ e otteniamo $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \frac{\mu}{\lambda}(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$, equazione del fascio con un unico parametro $t = \mu/\lambda$.

Qualunque valore dò a t, comunque perderò il piano
$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

Se nello studio non riesco a trovare il piano che cerco, potrebbe essere proprio quel piano che non compare più.

Cioè, nell' equaz. $\underbrace{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}_{*}+t(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$
perdiamo il piano $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$
(perchè rimane sempre * quella parte, non scompare)

Non abbiamo ancora parlato del parallelismo fra piani e fra piani e rette. Visto la definizione generale di parallelismo per gli spazi AFFINI si tratta ora di applicare tale definiz. A QUESTI CASI SPECIFICI.

ESEMPIO. ESERCIZIO:

Determinare il valore di h, K parametri reali, ($\in \mathbb{R}$), in modo che i piani
$\pi_1: 2x+hy-2z+3=0$
$\pi_2: x+2y+Kz+1=0$ si intersecano in una retta
$r \parallel$ al sottospazio generato dal vettore $\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

Di solito ci sono strade $\neq$ per arrivare alla soluzione.
Cosa sappiamo noi? Sapp. già una parte della retta che stiamo cercando. È data dall' inters. dei 2 piani, e ha gli stessi parametri del sottospazio dato. Conosciamo già i suoi parametri direttori, che sono proporzion. a $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow \quad r: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Abbiamo una parte dell'eq. parametrica.

Ma la retta è data dall' inters. dei 2 piani $\Rightarrow$ avremo la sua equazione cartesiana:

$$\begin{cases}2x+hy-2z+3=0\\ x+2y+Kz+1=0\end{cases}$$

Come faccio a determinare h e K?

④

Affinché sia veramente una retta (e non piani //) dobbiamo avere $rg(A)=2$.

$$rg\begin{pmatrix} 2 & h & -2 \\ 1 & 2 & k \end{pmatrix} = 2$$

come si fa ad imporlo? Per avere il $rg=2$, devo trovare una sottomatr. 2x2 che abbia det. $\neq 0$. ⇒ lo posso imporre.

Per es. $\begin{vmatrix} 2 & h \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. Se fosse $=0$, ne devo porre 1 altra $\neq 0$.

⇒ Devo imporre alle 3 sottom. che non siano tutte contemporaneamente $=0$. ⇒ $\begin{vmatrix} 2 & h \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$; $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & k \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & k \end{vmatrix} \neq 0$.

Vediamo se esiste un parametro che le fa diventare tutte e 3 $=0$.

$$\begin{cases} 4-h=0 \\ 2k+2=0 \\ hk+4=0 \end{cases}$$

si tratta di risolvere questo sistema. Poi, le soluz. di questo sistema dovranno essere ESCLUSE.

$$\Rightarrow \begin{cases} h=4 \\ k=-1 \\ -h+4=0 \end{cases} \Rightarrow \text{la coppia } (h,k) \overset{\text{DEVE ESSERE } \neq}{\neq} (4,-1)$$

Dopo di ciò, supponendo di avere 1 retta, ragioniamo sui nostri parametri **direttori**. L'esercizio vuole i valori dei parametri ⇒ dall'eq. cartesiane della retta ricavo i parametri **direttori** e impongo ad essi di essere proporzionali ai dati.

l: si trova CALCOLANDO IL DETERMINANTE DELLA SOTTOMATRICE DI A FORMATA DALLA II e III COLONNA. → $\boxed{l = hk+4}$

m: con LA I e III colonne e cambiando il segno → $\boxed{m = -(2k+2)}$

n: DETERMINANTE DELLA SOTTOMATRICE FORMATA DALLA I e II COLONNA → $\boxed{n = 4-h}$

Ora dobbiamo fare in modo che siano multipli dei parametri dati.

$$\Rightarrow \begin{aligned} l &= hk+4 = t \\ m &= -(2k+2) = t \\ n &= 4-h = t \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} hk+4=t \\ -(2k+2)=t \\ 4-h=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (4-t)\left(\frac{-2-t}{2}\right)+4=t \\ k=\frac{-2-t}{2} \\ h=4-t \end{cases}$$

$$-8+2t-4t+t^2+8=2t$$
$$t^2-4t=0$$

(Il "t" ci serve, altrim. non avremmo potuto risolv. il sistema)

$t(t-4)=0 \quad \begin{cases} t=0 \\ t=4 \end{cases}$

$\Rightarrow$ per $t=0$, $K=-1$ e $h=4$, cioè $(h,K)=(4,-1) \to$ esclusa perché tali valori dei parametri non danno una retta.

per $t=4$, $\Rightarrow h=0$ e $K=-3$. $\Rightarrow$ $r: \begin{cases} 2x-2z+3=0 \\ x+2y-3z+1=0. \end{cases}$

SE VOGLIAMO SCRIVERE L'EQUAZIONE VETTORIALE CERCHIAMO UN PUNTO DELLA RETTA, CIOÈ UNA SOLUZIONE DEL SISTEMA:

per $z=0$, $\begin{cases} x=-3/2 \\ y=\dfrac{3/2-1}{2}=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$ $\Rightarrow$ la nostra retta avrà equaz. vettoriale

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Come geom. analitica nello spazio affine, ci fermiamo al parallelismo. La perpendicolarità la riprenderemo quando tratteremo l'ortogonalità. Non parliamo neanche di distanze e lunghezza, non abbiamo gli strumenti ancora!

Abbiamo lavorato sugli spazi vettoriali e spazi affini.

DEFINIAMO alcune delle altre strutture algebriche, che sono gli insiemi di partenza dotati di operazioni (CHE GODONO DI PIÙ PROPRIETÀ) $\to$ più sono complicate, più possiamo "FARE" IN ESSE!

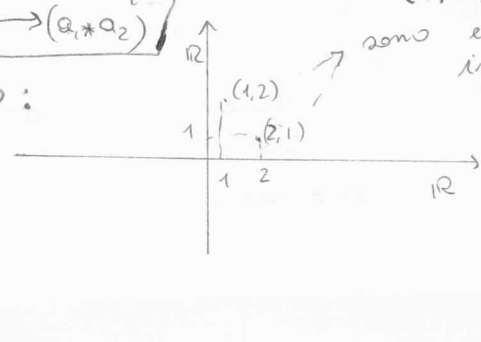
Dal punto di vista delle strutture ALGEBRICHE ci sono DIVERSE DI ESSE CHE NON TRATTEREMO. Definiamo il GRUPPO.

Dato un insieme A, sia data su di esso una operazione (chiamata "stella", $*$ per LASCIARLA il + generica possibile) BINARIA: $\to$ la nostra operazione può essere vista come funzione e si applica a COPPIE ORDINATE

INTERNA: $\to$ il risultato dell'operaz. sta ancora in A.

$$\Rightarrow \text{"}*\text{"} \quad A \times A \longrightarrow A$$
$$(a_1, a_2) \longmapsto (a_1 * a_2)$$

ESEMPIO DI PRODOTTO CARTESIANO: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si pensa così:



(1,2) e (2,1) sono elementi diversi dello insieme $\to$ si dice che le COPPIE SONO ORDINATE.

⑥ DEFINIZIONE: LA COPPIA $(A; *)$ È UN GRUPPO SE ~~...~~ questa operazione verifica determinate proprietà:

1) ASSOCIATIVA $\Rightarrow$ $a_1 * (a_2 * a_3) = (a_1 * a_2) * a_3 \quad \forall a_1, a_2, a_3 \in A$

lo posso fare l'operaz. tra due elementi della terna data e posso cambiare le coppie di questi elementi,

però sempre mantenendo l'ORDINE in cui i numeri sono scelti.

L'associatività ci permette di togliere le parentesi.

2) $\exists$ ELEMENTO NEUTRO "e": $e * a = a * e = a \quad \forall a \in A$

lascia invariato l'elemento

(con la somma tra numeri è 0, con la moltipl. è 1).

3) $\forall a \in A$, $\exists$ un elemento $b \in A$, detto INVERSO di a, tale che

$a * b = b * a = e$.

Le operaz. di cui parleremo saranno somma ~~...~~ MOLTIPL. ~~...~~ (e la DIVIS., perché è ritenuta una MOLTIPLIC. per il RECIPROCO)

Fino a qui sono PROPRIETÀ IMPOSTE per avere 1 gruppo.

Se l'operazione verifica anche la proprietà commutativa,

cioè $a_1 * a_2 = a_2 * a_1 \quad \forall a_1, a_2 \in A$, $\Rightarrow$ il GRUPPO è detto

COMMUTATIVO o ABELIANO (da Abel).

Esempio.

$A = \mathbb{N}$ e "$*$" = "$+$" $\to$ (la nostra operaz. è somma tra numeri naturali).

$\Rightarrow (\mathbb{N}, +)$ è un gruppo?

[DEFINIZIONE:
Se l'oper. è somma, si dice GRUPPO ADDITIVO

Se l'oper. è 1 moltiplic., si dice GRUPPO MOLTIPLICATIVO]

È gruppo additivo?

No, non vale la 3a proprietà. Non c'è l'inverso.

È $(\mathbb{N}, \cdot)$ è un gruppo moltiplicativo?

$$2 \cdot (3 \cdot 4) = (2 \cdot 3) \cdot 4$$
$$2 \cdot 12 = 6 \cdot 4 \qquad 24 \quad 24$$

[N.B. $0 \in \mathbb{N}$]
Ma ci sono $\neq$ correnti di pensiero, per alcuni non è neanche un numero

NO, perché non $\exists$ in $\mathbb{N}$ un elemento che moltipl. per $n \in \mathbb{N}$ dia 1. (NON C'È RECIPROCO)

Con $\mathbb{N}$ ho pochissimo, AD ESEMPIO: anche l'equaz. $(x+1) = 0$ non ho sol. in $\mathbb{N}$!!

$(\mathbb{Z},+)$ è gruppo additivo? Sì, perché ogni # intero ha un opposto.
E i due sommati danno zero, qualunque siano i numeri.

È commutativo questo gruppo? Sì, è abeliano.

In $\mathbb{Z}$, $x+1=0$ HA SOLUZIONE $\Rightarrow$ posso risolv. equaz. che prima, in $\mathbb{N}$, non potevo fare.

$(\mathbb{Z},\cdot)$ non è un gruppo perché non c'è il reciproco.

$(\mathbb{Q},+)$ è un gruppo? sì, perché possiamo sommare a coppie i numeri razionali, nell'ordine $\rightarrow$ sì assoc., sì elem. neutro, sì OPPOSTO
È anche abeliano perché posso sommare $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$.

(N.B. $\mathbb{N}$ non sta in $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ non sta in $\mathbb{Q}$,
$\mathbb{Q}$ non sta in $\mathbb{R}$. ~~[illegible]~~, lo rivedremo dopo aver studiato le applicazioni)

Tutte le proprietà che valgono per i sottoinsiemi, valgono anche per gli insiemi più grandi.

$(\mathbb{Q}-\{0\},\cdot)$ è un gruppo? $(\mathbb{Z},\cdot)$ non lo era, perché non riuscivo a risolv. $2x+1=0$
$\Downarrow$
Sì, perché è assoc., ho 1 come elem. neutro, e ogni elem, a parte lo zero, ha inverso.

~~[illegible]~~

$\Rightarrow (\mathbb{Q}-\{0\},\cdot)$ è un gruppo abeliano. Ora $2x+1=0$ ha soluzione.

Quella di gruppo è la STRUTTURA MINIMA in cui possiamo lavorare. Ce ne sono altre ancora più ridotte, ma ci si [illegible] lavora molto male. L'ultima struttura algebrica, la più complessa, sarà il campo. Tra le strutture ALGEBRICHE, ci sono anche gli spaz. vettoriali CHE ABBIAMO GIÀ STUDIATO