9/05/2011

$Q(x_1, x_2, x_3)$ VOGLIAMO STUDIARE LA FORMA QUADRATICA $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ TALE CHE
$= x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$

$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad [Q]_C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$ matrice che deve essere simmetrica $= [F_Q]_C$

base canonica come base di partenza

$\Rightarrow \left| [Q]_C \right| = -4 \neq 0$ per cui si $rg\,Q = 3$ $\quad$ <u>Q è non degenere</u> : $rg\,Q = 3$

sviluppato secondo l'ultima riga

Segnatura di Q ? → ridurre la forma quadratica a forma canonica

Riduciamo Q a forma canonica con il metodo di Gauss di riduzione ai quadrati

$x_1 + 2x_1(-2x_2 + x_3) + 4x_2^2 + x_3^2 = \left(x_1 + (-2x_2 + x_3)\right)^2 - (-2x_2 + x_3)^2 + 4x_2^2 + x_3^2$

$= (\qquad)^2 - \cancel{4x_2^2} - \cancel{x_3^2} + 4x_2x_3 + \cancel{4x_2^2} + \cancel{x_3^2}$ primo cambiamento di coordinate

devono essere sempre lineari

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

$\Rightarrow Q(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + \underline{4y_2y_3}$

$4y_2y_3 = (y_2 + y_3)^2 - (y_2 - y_3)^2 = y_2^2 + y_3^2 + 2y_2y_3 - y_2^2 - y_3^2 + 2y_2y_3$

$\Rightarrow Q(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + (y_2 + y_3)^2 - (y_2 - y_3)^2$

Faccio un altro cambiamento di coordinate →

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 + y_3 \\ z_3 = y_2 - y_3 \end{cases}$$

$Q(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$ $\quad$ L'abbiamo ridotta in forma canonica

1

La segnatura è $(\underset{\uparrow}{2},1) = (p \cdot q)$

n° coefficienti positivi

Abbiamo determinato una nuova base B di $\mathbb{R}^3$ | $[Q]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

B è F_Q- ortogonale

Ricerchiamo ora la base B di $\mathbb{R}^3$: Il cambiamento finale di coordinate è:

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ z_2 = x_2 + x_3 \\ z_3 = x_2 - x_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

coordinate nella base finale

coordinate nella Base canonica

$$(\mathbb{R}^3, C) \xrightarrow{id} (\mathbb{R}^3, B)$$
$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

LA BASE B È: $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

B è F_Q- ortogonale ?

F_Q è LA FORMA BILINEARE POLARE quella che ha la stessa matrice della forma quadratica

$$[F_Q]_C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow F_Q(x, \tilde{x}) = x^T [F_Q]_C \tilde{x} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix}$$

vettori di $\mathbb{R}^3$

$$= x_1\tilde{x}_1 - 2x_1\tilde{x}_2 - 2\tilde{x}_1 x_2 + x_1\tilde{x}_3 + \tilde{x}_1 x_3 + 4x_2\tilde{x}_2 + x_3\tilde{x}_3$$

quando coincidono, formano il quadrato x_1^2

$(1,0,0)[\ \ ]_C \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ = questo prodotto deve essere 0 perché sto cercando Base F_Q-ortogonale

GIUSTA!!

$= -2 - 2 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 \neq 0 \Rightarrow$ NON È LA BASE.

DOBBIAMO CERCARE I VETTORI DELLA BASE B NELLA BASE CANONICA! CIOè

EQUIVALE A CERCARE I VETTORI COLONNA DELLA MATRICE A^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{R_2 - R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(A, I)

sono le immagini della base canonica nella base B

$$\sim \begin{array}{l} R_3 - 2R_2 \\ R_3 - 2R_1 \end{array} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{R_1 + 2R_2}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & +\frac{1}{2} & +\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \to R_0 \text{ diviso per } "-2"$$

(A^{-1}) $\to S$

ha per colonne i vettori di Base. Sono le colonne che ci danno la nuova base

INFATTI :

$$(1,0,0)[\;]_c \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} - \left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 0$$

$$(1,0,0)[\;]_c \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} - \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right)[\;]_c \overset{\tilde{X}}{\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}} = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} - 2 \cdot \frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} + \frac{4}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$[Q]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le due matrici sono congruenti, la matrice S è quella che esprime la base B nella base canonica, e ci permette di dare la congruenza. INFATTI :

$$[Q]_B = S^T [Q]_c S$$

Definizione : Si chiama PRODOTTO SCALARE ogni forma bilineare reale simmetrica definita positiva

Forma bilineare che ha rango massimo e tutti i coefficienti della forma canonica sono positivi.

DIAMO LA DEFINIZIONE DI SPAZIO EUCLIDEO.

Uno spazio vettoriale reale in cui è definito un prodotto scalare è detto **SPAZIO EUCLIDEO**

Poniamo ora definire nello spazio vettoriale una distanza, misurare e definire l'angolo, la lunghezza.

Esempio: In $\mathbb{R}^n$ sia definita la ~~forma bilineare~~ funzione $F(x,y) = \boxed{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}$

$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Prodotto scalare standard

DIMOSTRIAMO CHE E' BILINEARE

$$F(\alpha x_1 + \beta \tilde{x}_2, y) = \alpha F(x_1, y) + \beta F(\tilde{x}_2, y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

serve per dimostrare che è una forma bilineare

$$\alpha x_1 + \beta \tilde{x}_2 = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta \tilde{x}_1 \\ \alpha x_2 + \beta \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \beta \tilde{x}_n \end{pmatrix} \Rightarrow F(\alpha X + \beta \tilde{X}, y) = (\alpha x_1 + \beta \tilde{x}_1) y_1 + (\alpha x_2 + \beta \tilde{x}_2) y_2 + (\alpha x_3 + \beta \tilde{x}_3) y_3 + \dots + (\alpha x_n + \beta \tilde{x}_n) y_n$$

$$= \alpha F(x,y) + \beta F(\tilde{x}, y)$$

(FAR VEDERE CHE $F(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha F(x, y_1) + \beta F(x, y_2)$)

FACCIAMO VEDERE CHE E' SIMMETRICA:

$F(x,y) = F(y,x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \dots + y_n x_n$ è simmetrica

DEFINITA POSITIVA

$F(x,x) > 0, \ \forall x \neq 0 \qquad F(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 > 0$

La somma di quadrati è sempre positiva in $\mathbb{R}$ se $X \neq 0$

INOLTRE

$$[F]_C = \begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \hline x_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \\ x_n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} = I$$

Il ~~prodotto~~ prodotto scalare standard ha la matrice associata alla base canonica uguale all'identità.

Esempi di spazi euclidei: sia $C^0_{[a,b]} = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ continue} \}$ $\quad C^0_{[a,b]}$ è uno spazio vettoriale reale

definisco questa applicazione $F : C^0_{[a,b]} \times C^0_{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una forma bilineare simmetrica, definita positiva

$$(f, g) \longrightarrow \int_a^b (fg)(x)\,dx$$

il prodotto di 2 funzioni è definito punto per punto

Far vedere che è una forma bilineare vuol dire mostrare le proprietà di un integrale definito; DIMOSTRARE CHE È SIMMETRICA. E CHE È DEFINITA POSITIVA, CIOÈ $\int_a^b f^2(x)\,dx > 0 \quad \forall f \neq 0$.

Lavoriamo nello spazio euclideo ($\mathbb{R}^n$, F prodotto scalare) $\Rightarrow$ considero la forma quadratica ad esso associata $Q: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow F(x,x)$$

$\Rightarrow Q(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$

siccome è un n° reale positivo, posso estrarre la radice quadrata

Definiamo "norma di x" $\quad \|x\| = \sqrt{Q(x)} = \sqrt{F(x,x)}$

geometricamente possiamo definire la lunghezza di un vettore x come la sua norma

Se considero il prodotto scalare standard $(F(x,y) = x \cdot y) \Rightarrow \|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2}$