$L$ lineare $L: V \longrightarrow W$ fissate le basi $B_V = \{v_1 \dots v_m\}$ e (1)

$B_W = \{w_1 \dots w_k\} \Rightarrow L(\underbrace{v}_{\in \operatorname{Im} L \leq W}) = L(a_1 v_1 + \dots + a_m v_m) =$

$= a_1 L(v_1) + \dots + a_m L(v_m) \Rightarrow \operatorname{Im} L = \langle\langle L(v_1), \dots, L(v_m) \rangle\rangle$

$$\Rightarrow [L]^{B_W}_{B_V} = \begin{pmatrix} [L(v_1)]_{B_W} & [L(v_2)]_{B_W} & \dots & [L(v_m)]_{B_W} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}_{K \times m}$$

N.B.
il n° delle righe della matrice DÀ IL # delle coordinate dei vettori CHE GENERANO L'IMMAGINE DELLA FUNZIONE.

Considero matrice associata all'applicazione $[L]^{B_W}_{B_V}$ ($B_W$: codominio; $B_V$: spazio vettoriale dominio)

$$[L]^{B_W}_{B_V} \cdot [v]_{B_V} = [L(v)]_{B_W}$$

$v$: qualunque vettore; $L(v)$: vettore immagine, sotto forma (DI VETTORE) di coordinate nella base del codominio

Se parto da matrice qualunque, fissate le basi vettoriali, posso associare un'applicazione?

Sia $A \in M_{K \times m}(\mathbb{R}) \Rightarrow$ ad essa posso associare un'applicazione $L$

$$L: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^K$$
$$X = (x_1 \dots x_m) \longrightarrow (y_1 \dots y_K) = Y$$

coordinate vettore NELLA base di $\mathbb{R}^n$; coordinate vettore NELLA base DI $\mathbb{R}^K$

fisso delle basi $B_{\mathbb{R}^m} = \{v_1, \dots, v_m\}$ e $B_{\mathbb{R}^K} = \{w_1, \dots, w_K\}$

$\Rightarrow Y = AX$ dunque
$$L: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^K$$
$$X \longmapsto AX$$

Esempio

$\underset{2\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ costruisco $L_A: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$$X = (x_1, x_2, x_3) \longmapsto A \cdot X^*$$

$$* \quad AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{2\times 1}$$

Dimostriamo che questa applicazione $L_A$ è lineare

Proposizione = $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ è lineare
$X \longrightarrow AX$

Devo dimostrare:

1) $L_A(x_1 + x_2) = L_A(x_1) + L_A(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$

2) $L_A(\alpha x_1) = \alpha L_A(x_1) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$L_A(x_1 + x_2) \overset{\text{Per definizione}}{=} A(x_1 + X_2) =$ (per proprietà distributiva)

$\Downarrow$

$AX_1 + AX_2 = L_A(X_1) + L_A(X_2)$

$(\alpha X_1) = A(\alpha X_1) = \alpha AX_1 = \alpha L(X_1)$

$\Downarrow$

l'applicazione costruita è lineare c.v.d.

$\exists$ dunque una corrispondenza tra lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari tra V e W e lo spazio vettoriale delle matrici $M_{\dim W \times \dim V}(\mathbb{R})$, ~~cioè~~ $\mathcal{H}om(V, W)$

$\llcorner$ spazio vettoriale delle applicazioni lineari da V a W

$F: \mathcal{H}om(V, W) \longrightarrow M_{\dim W \times \dim V}$, fissate le basi $B_V$ e $B_W$.

$L \longrightarrow [L]_{B_V}^{B_W}$

e inoltre $\exists\, G: M_{\dim W \times \dim V} \longrightarrow \mathcal{H}om(V, W)$

$A \longmapsto L_A$

$\Rightarrow$ Si dimostra che $G = F^{-1}$ e che $F$ è lineare e $G$ è lineare (2)

(da dimostrare per esercizio insieme al fatto che $Hom(V, W)$ è spazio vettoriale)

$\Updownarrow$

INFATTI IN $Hom$ viene definita sui vettori (cioè SULLE APPLICAZIONI) L'OPERAZIONE DI SOMMA $\rightarrow (L_1 + L_2)(v) = L_1(v) + L_2(v)$ E DI MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE $\rightarrow (\alpha L)(v) = \alpha(L(v))$

Si deduce che $G$ ed $F$ sono isomorfismi, POICHE' F E' BIETTIVA, cioè c'è equivalenza fra gli spazi, ciò è valido QUANDO SI FISSANO LE BASI IN $V$ E $W$; se le cambio, cambia, l'isomorfismo $\Rightarrow$ NON è CANONICO!! PERCHE' F DIPENDE DALLE BASI SCELTE IN $V$ E $W$!!

Proposizione: $F: Hom(V, W) \rightarrow M_{\dim W \times \dim V}$ è un isomorfismo $\boxed{\text{non canonico}}$

Dimostrazione: esercizio dato

Proposizione: Date le applicazioni lineari $L_1: V \rightarrow W$ e $L_2: W \rightarrow U$ con $V, W, U$ spazi vettoriali $\Rightarrow$ se $\exists$ $L_2 \circ L_1$, composto ($L_2 \circ L_1 : V \rightarrow U$), essa è lineare

Dimostrazione: $(L_2 \circ L_1)(v_1 + v_2) = L_2(L_1(v_1 + v_2)) =$

è definita così

$= L_2(L_1(v_1) + L_1(v_2))$ ma anche $L_2$ è lineare $\Rightarrow$

$\Rightarrow L_2(L_1(v_1)) + L_2(L_1(v_2))$ e per definizione sarà $=$

$(L_2 \circ L_1)(v_1) + (L_2 \circ L_1)(v_2)$ I$^a$ proprietà dimostrata

Poi $(L_2 \circ L_1)(\alpha v) = L_2(L_1(\alpha v))$ = per linearità di $L_1$ =>

$L_2(\alpha L_1(v))$ = per linearità di $L_2$ => $\alpha L_2(L_1(v))$ =

$= \alpha (L_2 \circ L_1)(v)$ II$^a$ proprietà verificata

$\Downarrow$

si può associare una matrice <= è lineare $L_2 \circ L_1 : V \longrightarrow U$

Fissate le basi $B_V$, $B_W$, $B_U$ negli spazi vettoriali V, W e U,

=> posso costruire $[L_1]_{B_V}^{B_W}$, $[L_2]_{B_W}^{B_U}$ e $[L_2 \circ L_1]_{B_V}^{B_U}$

Proposizione: la matrice associata $[L_2 \circ L_1]_{B_V}^{B_U} = [L_2]_{B_W}^{B_U} \cdot [L_1]_{B_V}^{B_W}$

DIMOSTRAZIONE

SE $\dim V = n$, $\dim W = K$ e $\dim U = p$ =>

=> $[L_1]_{B_V}^{B_W} \in \mathcal{M}_{K\times n}$; $[L_2]_{B_W}^{B_U} \in \mathcal{M}_{p\times K}$; e $[L_2 \circ L_1]_{B_V}^{B_U} \in \mathcal{M}_{p\times n}$

$[L_2 \circ L_1]_{B_V}^{B_U} [v]_{B_V} = [(L_2 \circ L_1)(v)]_{B_U}$; inoltre

$[L_2]_{B_W}^{B_U} [w]_{B_W} = [(L_2)(w)]_{B_U}$ e infine

$[L_1]_{B_V}^{B_W} [v]_{B_V} = [L_1(v)]_{B_W}$

vettore delle coordinate

allora $[(L_2 \circ L_1)(v)]_{B_U} = [L_2(L_1(v))]_{B_U}$ =

$= [L_2(L_1(v))]_{B_U} = [L_2]_{B_W}^{B_U} [L_1(v)]_{B_W}$ = $\longrightarrow$

lo sostituisco

INOLTRE => $[L_2 \circ L_1]_{B_V}^{B_U} [v]_{B_V} = [(L_2 \circ L_1)(v)]_{B_U}$ PER DEFINIZIONE

$$= [L_2]^{B_U}_{B_W} \cdot [L_1]^{B_W}_{B_V} [v]_{B_V}$$

3

La conclusione è, che poiché $v \in V$ è "generico" si ha l'uguaglianza fra le matrici c.v.d.

---

Sia data $L: V \longrightarrow W$ applicazione lineare, $\dim V = n$ e $\dim W = K$ se sono fissate le basi $B_V$ e $B_W$ ad $L$ associo la matrice $[L]^{B_W}_{B_V}$, se fisso basi diverse in $V$ e in $W$ $\Rightarrow$ ad $L$ associo un'altra matrice $[L]^{B'_W}_{B'_V} \neq [L]^{B_W}_{B_V}$

Considero la composizione delle applicazioni:

1) identità$_V$ da $V \longrightarrow V$, $L: V \longrightarrow W$ e identità$_W$ $W \to W$

$\Rightarrow$ $id_W \circ L \circ id_V = L$ (l'applicazione non è cambiata dal variare delle basi)

consideriamo $id_V: (V, B'_V) \longrightarrow (V, B_V)$ $L: (V, B_V) \longrightarrow (W, B_W)$

e $id_W: (W, B_W) \longrightarrow (W, B'_W) \Rightarrow id_W \circ L \circ id_V: (V, B'_V) \to (W, B'_W)$

$\Rightarrow$ associo le matrici a tali applicazioni

che sono rispettivamente:

$[id_V]^{B_V}_{B'_V}$ poi ho $[L]^{B_W}_{B_V}$, $[id_W]^{B'_W}_{B_W}$,

$[id_W \circ L \circ id_V] = [L]^{B'_W}_{B'_V}$

(partendo dallo spazio di partenza $\Rightarrow$ ho $B'_V$ NEL DOMINIO E $B'_W$ NEL CODOMINIO)

Per ciò che è stato dimostrato prima:

$$[L]^{B'_W}_{B'_V} = [id_W]^{B'_W}_{B_W} \cdot [L]^{B_W}_{B_V} \cdot [id_V]^{B_V}_{B'_V}$$

~~[illegible]~~ OSSERVAZIONE:

qual è la matrice associata all'identità?

$$[id_V]^{B_V}_{B_V} = I$$

(quando basi degli spazi del dominio e codominio sono le stesse è l'unico caso)

Diagramma commutativo costruito così:

$$\begin{tikzcd}
(V, B_V) \arrow[r, "L"] & (W, B_W) \arrow[d, "id_W"] \\
(V, B'_V) \arrow[u, "id_V"] \arrow[r, "L"] & (W, B'_W)
\end{tikzcd}$$

codominio di $id_V$ — $(V, B_V)$

dominio di $id_W$ — $(W, B_W)$

codominio di $id_W$ — $(W, B'_W)$

dominio di $id_V$ — $(V, B'_V)$

$L$ (Perché a livello di applicazione posso scegliere qualunque strada per poi arrivare alla stessa "destinazione" GIRANDO SUL DIAGRAMMA)

$L$ una volta cambiate le basi negli spazi

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3} \Downarrow [L]^{C}_{C}$$

$L : (\mathbb{R}^3, C) \to (\mathbb{R}^2, C)$ e siano

$$B_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ e}$$

$$B_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

e cerco $[L]^{B_{\mathbb{R}^2}}_{B_{\mathbb{R}^3}}$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^3, C) \arrow[r, "L"] & (\mathbb{R}^2, C) \arrow[d, "id_{\mathbb{R}^2}"] \\
(\mathbb{R}^3, B_{\mathbb{R}^3}) \arrow[u, "id_{\mathbb{R}^3}"] \arrow[r, "L"] & (\mathbb{R}^2, B_{\mathbb{R}^2})
\end{tikzcd}$$

$L$ la cerco, costruisco matrici associate a $id_{\mathbb{R}^3}$ e $id_{\mathbb{R}^2}$

⊛ $[id_{\mathbb{R}^2}]^{B_{\mathbb{R}^2}}_{e_{\mathbb{R}^2}} \Leftarrow$ cerco

$$id_{\mathbb{R}^3} \to [id]^{e}_{B_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

cerco immagine I° vettore = sempre lui perché identità MA CAMBIANO LE COORDINATE PERCHÉ BASI $\neq$

(*) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]^{B_{\mathbb{R}^2}}_{e_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$

vettori di base canonica

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Trovare i coefficienti a cose

cioè $\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

matrice da calcolare