Sia $V = \mathbb{R}^3$ e siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ vettori di $\mathbb{R}^3$

$\{v_1, v_2\}$ è base di $\mathbb{R}^3$?

1) v_1, v_2 devono essere linearmente indipendenti

2) v_1, v_2 devono generare $\mathbb{R}^3$

COMBINAZIONE LINEARE

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$

OTTENIAMO IL SISTEMA SCALARE

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{LA CUI matrice associata}} \text{È} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

linearmente indipendenti perché il det è $\neq 0$

il rango di questa matrice è 2.

LA MATRICE HA PER COLONNE LE COORDINATE DEI VETTORI V_1 E V_2

v_1 e v_2 quindi sono linearmente indipendenti

VEDIAMO SE GENERANO TUTTO $\mathbb{R}^3$.

AGGIUNGIAMO alla matrice un nuovo vettore. COLONNA

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = +2 - 1 = 1 \neq 0$$

I tre vettori sono linearmente indipendenti

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

il terzo vettore non è una combinazione lineare degli altri 2. INFATTI SE LO PONGO COME LORO COMBINAZIONE LINEARE, IL SISTEMA CHE NE DERIVA È IMPOSSIBILE

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 = 1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{matrice associata}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{R_1 - R_3}{\overset{R_1 - R_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{R_2 + R_3}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ ABBIAMO TROVATO UN VETTORE CHE NON È GENERATO DAGLI ALTRI DUE

$\Rightarrow v_1$ e v_2 quindi non possono generare $\mathbb{R}^3$.

la matrice ~~[illegible]~~ CI DICE CHE IL SISTEMA È IMPOSSIBILE $\Longleftarrow$ l'ultima equazione è impossibile $0 = 1$

$$B_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

I TRE VETTORI COSTITUISCONO UNA BASE DI $\mathbb{R}^3$ _

CI SONO INFINITE BASI DI UNO SPAZIO VETTORIALE IN PARTICOLALE POSSIAMO DARE LA BASE CANONICA $\mathcal{C}$: AD ESEMPIO

$\mathcal{C}$ = base canonica di $\mathbb{R}^3$

$$= \{ e_1, e_2, e_3 \} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

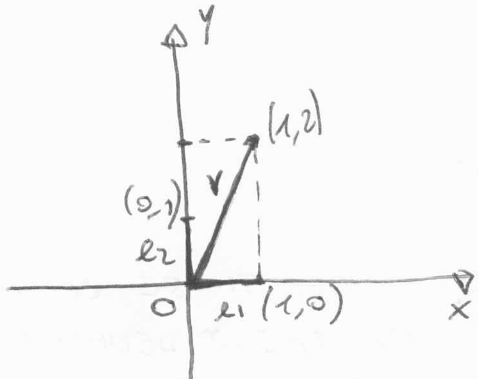
COSÌ LA BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^n$ SARÀ:

$$\mathcal{C} \text{ di } \mathbb{R}^n = \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

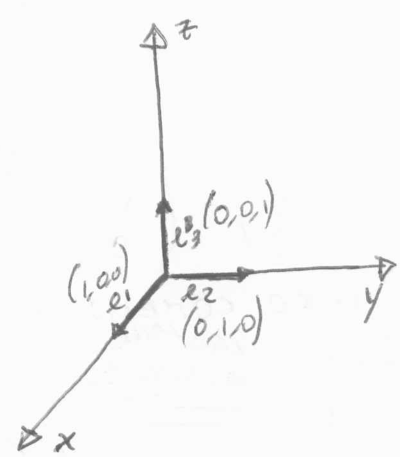
La matrice associata AI VETTORI DELLA BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^3$ È

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \det I = 1 \Rightarrow$$ Sono tre vettori linearmente indipendenti

$\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^3$



$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

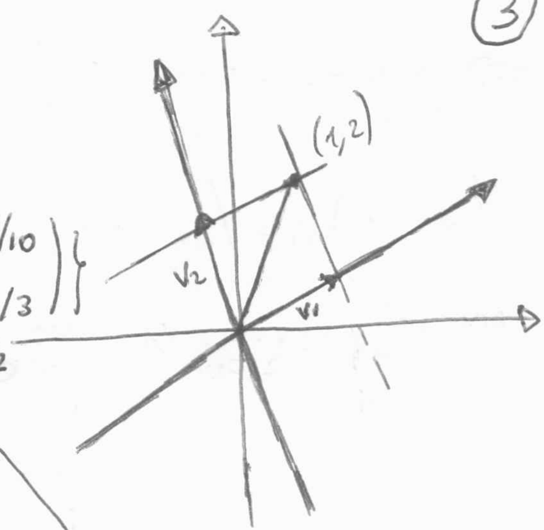
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

; LE COORDINATE DI UN VETTORE V IN UNA BASE B SONO I COEFFICIENTI DELLA COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI DELLA BASE, CHE ESPRIME IL VETTORE V.

$$v=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \qquad B=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

CAMBIAMO LA BASE DI $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{B}=\left\{\underset{v_1}{\begin{pmatrix}2\\1/2\end{pmatrix}},\underset{v_2}{\begin{pmatrix}-1/10\\2/3\end{pmatrix}}\right\}$

CERCHIAMO LE COORDINATE DI $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ NELLA BASE $\mathcal{B}$:



$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}2\\1/2\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}-\frac{1}{10}\\2/3\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2\alpha_1-\frac{1}{10}\alpha_2=1\\[2mm]\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2=2\end{cases}$$

$v_1=\left(2,\frac{1}{2}\right)$

$v_2=\left(-\frac{1}{10},\frac{2}{3}\right)$

sono linear. indipendenti perché non sono l'uno il multiplo dell'altro.

$\begin{pmatrix}\text{dimensione}\\ \text{sol } \Sigma\end{pmatrix}=\underset{=\{\alpha_1,\alpha_2\}}{\underset{2}{\#\text{ variabili}}}-\underset{2}{\text{rango}}=\underset{0}{0}$: È UNA UNICA COPPIA (α_1,α_2)

$$\begin{cases}\alpha_2=20\alpha_1-10\\3\alpha_1+80\alpha_1-40=12\end{cases}\qquad\begin{cases}\alpha_2=20\alpha_1-10\\83\alpha_1=52\end{cases}\qquad\begin{cases}\alpha_1=\frac{52}{83}\\[2mm]\alpha_2=\frac{210}{83}\end{cases}$$

coeff. della combinazione lineare.

$$\begin{pmatrix}2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}-\frac{1}{10}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{10}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}-\frac{1}{10}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

LE COORDINATE DEI VETTORI DI BASE, ESPRESSI COME COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI DELLA BASE STESSA, DANNO I VETTORI CANONICI : $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

PROPOSIZIONE:

Data una base $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ di uno spazio vettoriale $V_{n\text{-dim.}}$ $\Rightarrow$ ogni vettore di V si esprime in modo unico come combinazione lineare dei vettori di base.

Dimostrazione: Per assurdo supponiamo che, dato $v\in V$

$$v=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\dots+\alpha_nv_n=\beta_1v_1+\beta_2v_2+\dots+\beta_nv_n \Rightarrow$$

④

$$\Rightarrow \underbrace{\alpha_1 v_1} + \dots + \alpha_n v_n - \underbrace{\beta_1 v_1} - \beta_2 v_2 - \dots - \beta_n v_n = 0$$

$$(\alpha_1 - \beta_1) v_1 + (\alpha_2 - \beta_2) v_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) v_n = 0$$

POICHÈ $v_1, \dots, v_n$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI, $\Rightarrow$ ESSENDO LA COMBINAZIONE LINEARE UGUALE AL VETTORE NULLO, AVREMO

$$\begin{cases} \alpha_1 - \beta_1 = 0 \\ \alpha_2 - \beta_2 = 0 \\ \alpha_n - \beta_n = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{c} \alpha_1 = \beta_1 \\ \alpha_2 = \beta_2 \\ \vdots \quad \vdots \\ \alpha_n = \beta_n \end{array}$$