7 Marzo 2011 lunedì

N.B. Il termine funzione è riservato a LEGGI TRA sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ per lo più; quindi data ~~[illegible]~~

$f: A \to B$ A, B insiemi

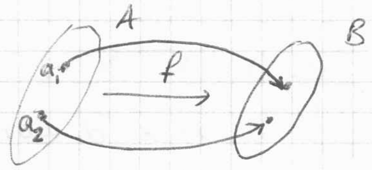
f si dice applicazione (o mappa).

DEFINIZIONE:

f, applicazione tra 2 insiemi, è iniettiva se $\forall\, a_1, a_2 \in A$, con

$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$. (Elementi distinti hanno immagini diverse).

Con gli insiemi di Eulero,

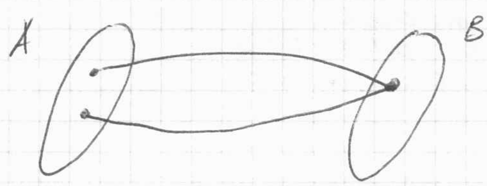


Invece, f è suriettiva se $\forall\, b \in B$ (con B codominio)

$\exists\, a \in A \mid f(a) = b$.

In soldoni, significa che ogni elemento del codominio è immagine di un qualche elemento del dominio.

Facciamo un esempio con gli insiemi di Eulero:

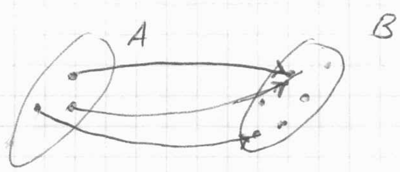


2 elementi distinti di A ~~corrisp~~ arrivano alla stessa immagine

$\Rightarrow$ f non è iniettiva.

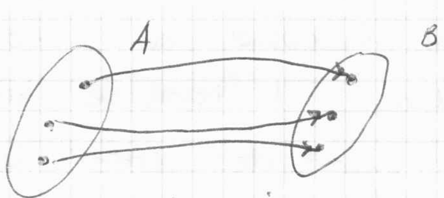
Per essere suriettiva, tutti gli elementi di B sono IMMAGINE de elementi del dominio.

Esempio.



non è iniettiva

non è suriettiva



biiettiva

Queste sono ~~teorie~~ definizioni insiemistiche.

Oltre alla DEFINIZIONE appena data, DI INIETTIVITÀ,
abbiamo dimostrato che NEL CASO DI STRUTTURE ALGEBRICHE, POSSIAMO CONSIDERARE IL NUCLEO DEL MORFISMO E ABBIAMO DIMOSTRATO CHE Nel caso degli spazi vettoriali, l'iniettività si vede anche dimostrando che il nucleo è costituito solo dal vettore nullo.
Si può dare o una o l'altra definizione; è più semplice con la 2a definizione. ~~la dimostrazione~~.

Torniamo alle applicaz. lineari e alla costruzione della matrice associata.
Correggiamo l'es. per casa. Si ha

$L: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$(x, y, z, t) \longmapsto (x-y;\ x-z;\ x-t)$

e le basi $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}①, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}②, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}③, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}④ \right\}$ e si dimostra che sono linearm. indip.

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Si applica la trasformazione $L\left(①\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (1')

si scrive come comb. lin. degli elementi della base del codominio

$L\left(②\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2')

$L\left(③\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (3')

$L\left(④\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \delta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \delta_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (4')

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ le colonne sono le coord. dei vettori di base del codom. I termini noti sono le coordinate delle immagini dei vettori di BASE DEL DOMINIO

→ possiamo anche scriverla così:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & ① & ② & ③ & ④ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & +2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{R_2 = R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\underset{\sim}{R_3 = R_2 - 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 11 & 0 & 11 \end{pmatrix} \underset{\sim}{R_2 = R_2 - R_3}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -8 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 11 & 0 & 11 \end{pmatrix} \underset{\sim}{R_1 = R_1 - R_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & & & ①' & ②' & ③' & ④' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 9 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 11 & 0 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

Così abbiamo già $\alpha_1 = -3$

$\alpha_2 = 2$ è la prima colonna della matrice

$\alpha_3 = -4$ che stiamo cercando.

I coeffic. $\beta_1 = 9$

$\beta_2 = -4$ sono la 2a colonna della matrice

$\beta_3 = 11$ che cerco.

Idem per il ③' e il ④' ⇒ Operando in questo modo, si trova subito la matrice che cerco, quella che indichiamo con $[L]^{B_{\mathbb{R}^3}}_{B_{\mathbb{R}^4}} =$, la matrice associata all'applicazione nelle due basi che avevo.

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} ①' & ②' & ③' & ④' \end{array} \\ \begin{pmatrix} -3 & 9 & 0 & 10 \\ 2 & -4 & 0 & -4 \\ -4 & 11 & 0 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ci si aspettava di trovare una sola soluz. per $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$; o per $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$; etc.?

Sì! PERCHÉ?

perché le colonne della matr. sono formate da vettori linearm. indipendenti

⇒ In partenza sapevo già che i ranghi siano =, il rg è 3, cioè massimo, perchè le colonne della matrice è formata da vettori lin. indip. E QUINDI PER IL TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI, ESISTE LA SOLUZIONE DI OGNI SISTEMA LINEARE E TALI SOLUZIONI SONO ESATTAMENTE: $\infty^{3-3} = \infty^{0} = 1$

Nel caso ~~di~~ in cui la base è quella canonica, tutto è immediato! Abbiamo subito la nostra matrice: BASTA METTERE IN RIGA, I COEFFICIENTI DI OGNI POLINOMIO CHE DEFINISCE OGNI COMPONENTE DELL'APPLICAZIONE LINEARE ORDINATI SECONDO LE VARIABILI.

Cioè se abb. $(x, y, z, t) \longmapsto (x-y,\ x-z,\ x-t)$

la matrice sarà

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = [L]^{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^3}}_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^4}}$$

i coeff. del I° polin. CHE DÀ LA PRIMA COORDINATA DELL'IMMAGINE, danno le entrate della prima riga. Idem per gli altri. Ogni polinomio, nei suoi coeffic, dà le entrate della righe della matrice. Questo solo quando LE BASI SONO CANONICHE!!

$= [L]^{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^3}}_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^4}}$

Però la matrice non si fa così IN GENERALE. Questo è un modo abbreviato che va bene solo in questo caso.
La regola più generale è quella che abbiamo già trattato.

Ora possiamo costruire la matrice ASSOCIATA AD UN'APPLICAZIONE LINEARE $f: V \longrightarrow W$ nelle basi che abbiamo scelto. Noi abbiamo associato una matrice ad un'applicazione LINEARE, STUDIANDO TALE MATRICE, POSSIAMO STUDIARE L'APPLICAZIONE

Posso vedere (AD ESEMPIO) se l' applicaz è iniettiva e suriettiva. : INFATTI le colonne sono elementi del codominio → stanno in $\mathrm{Im} f$, CIOÈ NELL' immagine DI f (E LA GENERANO). Se scopro quante sono linearm. indip., scopro qual è la dimensione di $\mathrm{Im} f$. E NE TROVO UNA BASE. ABBIAMO LA

PROPOSIZ:
Data $L: V \to W$, lineare, fissate le basi $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $B_W = \{w_1, \dots w_k\}$ $\Rightarrow$ L è conosciuta $\Leftrightarrow$ sappiamo le immagini degli elementi della base del dominio.

(Conoscere un' applicazione significa che so qual è l'immagine di ogni elemento del dominio

Dimostriamo questa proposiz. Abbiamo un se e solo se $\Rightarrow$ dobbiamo dimostrare la NECESSITÀ e la SUFFICIENZA.

Dim.
La necessità.

"$\Rightarrow$" è ovvia, perché se conosco le immagini di tutti gli elementi, conosciamo anche le immagini degli elementi della base.!

La sufficienza.

"$\Leftarrow$" io so solo che gli elementi della base hanno una certa immagine.

Io allora cerco l' immagine di un elemento qualunque del dominio. Detto $v \in V$ tale elemento, si scriverà come combinaz. lineare della base del dominio (perché è un elemento del dominio):

$\Rightarrow v = a v_1 + a v_2 + \dots + a_n v_n \Rightarrow L(v) = L(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) =$

$= L(a_1 v_1) + L(a_2 v_2) + \dots + L(a_n v_n) =$ posso portare fuori gli "a_j" PER LA LINEARITÀ DI L

$= a_1 L(v_1) + a_2 L(v_2) + \dots + a_n L(v_n) =$

posto $L(v_i) = u_i$ (e siamo nell' immagine) $\Rightarrow$ scriveremo

che $L(v) = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$

$\Rightarrow$ Basta conoscere le immagini degli elementi della base per conoscere l'applicazione. c.v.d.

Diamo altre proposizioni.

La linearità conserva le dipendenze LINEARE, non le indipend. LINEARE, dei VETTORI

PROPOSIZIONE: Supponiamo di considerare un insieme di vettori $\{v_1, \dots, v_m\}$, vettori linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale V $\Rightarrow$ data $L: V \rightarrow W$ lineare, si dimostra che $L(v_1), L(v_2), \dots, L(v_m)$ sono ancora l. dipendenti.

Dim. Si deve dimostrare che gli m vettori sono l. dipend. $\Rightarrow$ prendiamo la combin. lineare di questi e la poniamo = al vett. nullo. (E DEVO DIMOSTRARE CHE $\exists$ coeffic. non nulli che risolvono la mia equazione.

Sia $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \dots + a_n v_n = 0$

devo sfruttare il fatto di aver un'applic. lineare e che i vettori v_j sono l. dipend. E QUINDI NON TUTTI GLI a_j SONO NULLI.

Essendo L lineare, $\Rightarrow L(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m) = L(0) = 0$

$\Rightarrow a_1 L(v_1) + a_2 L(v_2) + \dots + a_m L(v_m) = 0$

ma i "v_j" sono l. dip. per hp $\Rightarrow$ gli "a_i" non sono tutti nulli $\Rightarrow$ gli $L(v_j)$ sono linearm. dipend. perché nella combin. lineare ci sono coeffic. non nulli.

$L(v_1), L(v_2), \dots, L(v_m)$ sono l. dip.

c.v.d.

Non solo. Mantengono anche gli stessi coefficienti queste applicazioni, cioè lo stesso tipo di combin. lin. tra i vettori, (viene rispettata ANCHE una proporzionalità) SI RITROVA TRA LE LORO IMMAGINI!

Ora dimostriamo che, se le immagini dei vettori sono l. indip., allora i vettori del dominio, CHE HANNO QUELLE IMMAGINI, sono lin. indip. $\Rightarrow$ (*)

PROPOSIZ.

La linearità non conserva l'indipendenza dei vettori.

Siccome c'è un NON, basta un CONTROESEMPIO NUMERICO per dimostrare.

Consideriamo COME ESEMPIO:

$$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z,t) \longmapsto (x-y,\ x-z,\ x-t)$$

faccio l'immagine dei vettori della base canonica:

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f(e_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{siamo in } \mathbb{R}^3$$

e ne abbiamo 1 in più del numero massimo consentito DI VETTORI LIN. INDIPENDENTI

$\Rightarrow$ sono l. dipendenti. c.v.d.

PROPOSIZ.

stiamo in W ma devo prenderle come immagine di vettori di V

Data $L: V \to W$, se $w_1, \dots, w_k \in \operatorname{Im} L$ sono l. indipend.

$\Rightarrow$ posto $v_j \in V \mid L(v_j) = w_j$, $j = 1, \dots, k$ si ha

$v_1, \dots, v_k$ sono l. i.

Dimostrazione

Se per assurdo, ammettiamo che w_1, w_k fossero l. dipendenti,
$\Rightarrow$ la proposiz. di prima ci dice che le immagini $L(v_1) \dots L(v_k)$ dovrebbero essere l. indipendenti $\rightarrow$ ma non lo sono $\rightarrow$ ASSURDO, perchè contraddice le ipotesi che avevamo. E in matematica le ipotesi sono sempre vere! (non si può dimostrare la falsità di un'ipotesi)

Questo è il caso generale. però può succedere che vettori l. indip. abbiano per immagine vettori l. indipend.
Questo accade quando l'applicaz. è INIETTIVA.

Esercizio

Se $L: V \to W$ è iniettiva, oltre che lineare, $\Rightarrow$ i vettori immagine di vettori lin. indipendenti sono lin. indipend.
(FARE LA DIMOSTRAZIONE PER ESERCIZIO)

$\Rightarrow$ Basta conoscere le immagini degli elementi della base per conoscere l'applicazione. c.v.d.

Diamo altre proposizioni.

La linearità conserva le dipendenze LINEARE, non le indipend. LINEARE, dei VETTORI

PROPOSIZIONE: Supponiamo di considerare un insieme di vettori $\{v_1, \dots, v_m\}$, vettori linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale V $\Rightarrow$ data $L: V \to W$ lineare, si dimostra che $L(v_1), L(v_2), \dots, L(v_m)$ sono ancora l. dipendenti.

Dim. Si deve dimostrare che gli m vettori sono l. dipend. $\Rightarrow$ prendiamo la combin. lineare di questi e la poniamo = al vett. nullo.

E DEVO DIMOSTRARE CHE $\exists$ coeffic. non nulli che risolvono la mia equazione.

Sia $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \dots + a_m v_m = 0$

devo sfruttare il fatto di aver un'applic. lineare e che i vettori v_j sono l. dipend. E QUINDI NON TUTTI GLI a_j SONO NULLI.

Essendo L lineare, $\Rightarrow$ $L(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m) = L(0) = 0$

$\Rightarrow$ $a_1 L(v_1) + a_2 L(v_2) + \dots + a_m L(v_m) = 0$

ma i "v_j" sono l. dip. per hp $\Rightarrow$ gli "a_i" non sono tutti nulli. $\Rightarrow$ gli $L(v_j)$ sono linearm. dipend. perché nelle combin. lineari ci sono coeffic. non nulli.

$L(v_1), L(v_2), \dots, L(v_m)$ sono l. dip.

c.v.d.

Non solo. Mantengono anche gli stessi coefficienti queste applicazioni, cioè lo stesso tipo di combin. lin. tra i vettori (viene rispettata ANCHE una proporzionalità) SI RITROVA TRA LE LORO IMMAGINI!

Ora dimostriamo che, se le immagini dei vettori sono l. indip., allora i vettori del dominio CHE HANNO QUELLE IMMAGINI sono lin. indip. $\Rightarrow$ ⊛

Ora abbiamo tutte le carte per lavorare solo sulle matrici.

Ci basta conoscere LE IMMAGINI dei vettori di base per conoscere tutte le immagini DI OGNI VETTORE. Data $L: V \to W$, fissate le basi in V ed in W, $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $B_W = \{w_1, \dots, w_k\}$, $\Rightarrow$ le colonne della matrice associata ad L nelle basi scelte, $[L]_{B_V}^{B_W}$, GENERANO $Im\,L$.

$\Rightarrow$ il numero di colonne l. indipendenti, cioè il rango di $[L]_{B_V}^{B_W}$, ci dà la dimens. di $Im\,L$ e tali colonne formano una base di $Im\,L$.

Perciò, subito scritta la nostra matrice, calcolandone semplicem. il rg sappiamo già la dimensione dell'immagine.

Se si fa $[L]_{B_V}^{B_W}$ vuol dire scrivere per ogni w una combinaz. lineare

La $[L]_{B_V}^{B_W}$ è la matrice dei coefficienti del sistema lineare omogeneo le cui soluzioni formano il nucleo di L.

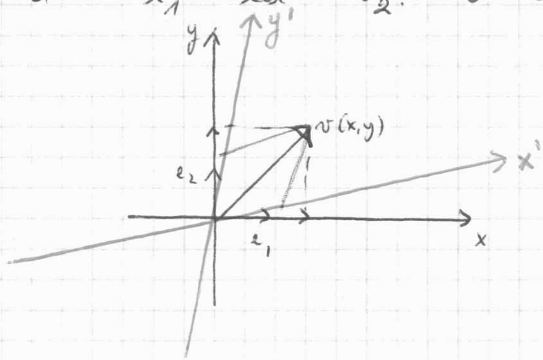
Quindi sappiamo sia dal teorema dimensionale che dal nostro ragionamento che ~~...~~: $\dim Sol(\Sigma) = n - rg\,[L]_{B_V}^{B_W}$

Ma ci sono ∞ matrici che posso associare ad una stessa applicaz. lineare... a questo punto bisogna studiare cosa cambia e cosa rimane uguale tra queste matrici. In realtà ciò che ci serve è INVARIANTE ~~...~~ dalla applicazione $\Rightarrow$ ne studierò 1 di matrice, la più semplice, e questo andrà bene per tutte le altre.

VOGLIAMO ~~...~~ capire come cambiano le matrici: esse cambiano perché cambiano le basi. DEGLI SPAZI VETTORIALI

Il cambiamento di base può essere visto come ~~...~~ un'applicaz. lineare. Se cambio le basi nello spazio, cambio le coordinate dei vettori.

Ad es. nel piano $\mathbb{R}^2$ scelgo la base canonica, e ci sono i versori e_1 ed e_2. E LE COORDINATE (x, y)



cambio sistema di rifer. il vettore resterà lì, cambiano solo le sue coordinate.

Nel primo sistema di riferimento ho scelto la base canonica in $\mathbb{R}^2$ e nel $\overbrace{\text{codominio}}^{\text{DI } id\,:\,\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}$, ho scelto una base $\mathcal{B}$ diversa che mi dà un altro sistema di riferim. CON LE COORDINATE (x', y')

$$id : (\mathbb{R}^2, \mathcal{E}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{B})$$
$$v \longmapsto v$$

e questa è l'IDENTITÀ, l'applicazione che non cambia l'elemento.

Il cambiamento di base lo posso vedere come un'applicaz. lin. dove cambio la base, cambio il sistema di riferim.

Prendo, ad es., la base canonica $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} : \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\} \quad , \quad e \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} \right\}$$

prendo i vettori di base, trovo le immagini → sono sempre quelli perché è un'identità, e li scrivo come combin. lin. degli altri vettori

$$id\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$$

$$id\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{pmatrix} = [id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} \text{ , è}$$

la matrice del cambiam. di base!

$$[id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$$
$$\|$$

Facciamo notare che $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ è la matr. assoc. all'identità $id : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{E})$ perché i VETTORI DI B sono espressi nella base canonica.

però andando dall'altra base a quella canonica.
Che legame c'è tra $[id]_{\mathcal{E}}^{B}$ e $[id]_{B}^{\mathcal{E}}$? Sono una l'inversa dell'altra.